ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/01

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

©Акматов А. А., *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO A SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

©Akmatov A.*, SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

Аннотация. В работе исследована асимптотика решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Нули собственных значений матрицы лежат в действительной оси. Переходя к комплексной плоскости определим отрицательную область, в которой проводится исследование. Линии уровня полностью покрывают эту область. Одна из линий уровня разделяет область на четыре части. В каждой из этих частей области выбираем пути интегрирования. Пути интегрирования должны быть убывающими от начальной до последней точки. Проводя вычисления по выбранному пути интегрирования получим асимптотические оценки решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Abstract. The work examines the asymptotics of solutions to singularly perturbed differential equations. The zeros of the matrix eigenvalues lie on the real axis. Moving on to the complex plane, we define the negative region in which the research is carried out. Level lines completely cover this area. One of the level lines divides the area into four parts. In each of these parts of the region we choose integration paths. The integration paths should be as decreasing from the starting point to the last point. Carrying out calculations along the chosen integration path, we obtain asymptotic estimates for solutions of singularly perturbed differential equations.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, начальная точка, линии уровня, затягивания потери устойчивости, путь интегрирования, асимптотика, малый параметр.

Keywords: singular perturbation, starting point, level lines, tightening of loss of stability, integration path, asymptotic, small parameter.

В работе рассматривается случай, когда нули собственных значений матрицы *D(t)* лежат в действительной оси. Случай, когда нули собственных значений лежат в комплексной плоскости рассматривались в работах [1–2, 4–6] и доказано что выполняется явление затягивания потери устойчивости решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [5]. *Цель исследования:* доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и соответствующих невозмущенных уравнений, в случае смены устойчивости на основе конкретного примера.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=D(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon\left[h(t)+f(t,x(t,\varepsilon))\right] \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \left\|x^0(\varepsilon)\right\|=const \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $t\in[t_0,T]$, $f(t,x(t,\varepsilon))=colon\left(f_1(t,x(t,\varepsilon)),f_2(t,x(t,\varepsilon))\right)$, $h(t)==colon(h_1(t),h_2(t))$, $D(t)=\begin{pmatrix}\lambda(t) & 0\\ 0 & \lambda(t)\end{pmatrix}$, где $\lambda(t)=t-1$, $x(t,\varepsilon)=colon\left(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon)\right)$ - искомая неизвестная функция.

Для решения правой части поставленной задачи (1) требуется выполнение следующих условий:

U1. $f(t,x)\in Q(\tilde{H})$ - пространство аналитических функций в области $\tilde{H}$, $f(t,0)\equiv 0$, $\left\|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})\right\|\le M\times\left\|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right\|$, $0<M$ - некоторая постоянная.

U2. $\lambda(t)=t-1<0$, $0\le t<1$; $\lambda(1)=0$; $\lambda(t)=t-1>0$, $1<t\le 2$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены условия U1-U2. Тогда $\forall t\in[0,2]$ решение задачи (1)-(2) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\left\|x(t,\varepsilon)\right\|\le C\sqrt{\varepsilon} \qquad (3)$$

где $C-const$.

Доказательство. Задачу (1)-(2) заменим интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t D(s)ds\right)+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t D(s)ds\right)\left[h(\tau)+f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau \qquad (4)$$

Для доказательства существования решения уравнения (4) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t D(s)ds\right)+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t D(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau)+f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau \qquad (5)$$

где $x_n(t,\varepsilon)=colon\left(x_{1n}(t,\varepsilon),x_{2n}(t,\varepsilon)\right)$, $n\in N$.

Далее будем считать, что $t=t_1+it_2$; $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 — действительные переменные. Тогда получим

$$\int_{t_0}^t\lambda(s)ds=\int_0^t\lambda(s)ds=\frac{t^2}{2}-t=\frac{1}{2}\left[(t-1)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-t_2^2-1\right]+it_2(t_1-1),$$

$$u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int_0^t\lambda(s)ds=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-t_2^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[t_1^2-2t_1-t_2^2\right],$$

$$\vartheta(t_1,t_2)=\operatorname{Im}\int_0^t \lambda(s)ds = t_2(t_1-1).$$

Справедливы оценки:

$\|A(t_1,t_2)\| = \left\| x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1+it_2} D(s)ds\right)\right\| = O(\varepsilon)$, при $u(t_1,t_2)\le 0$, где $D(t)=\begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t-1\end{pmatrix}$, $x^0(\varepsilon)=colon\left(x_1^0(\varepsilon),x_2^0(\varepsilon)\right)$, $\|A(t_1,t_2)\| = colon\left(|A_1(t_1,t_2)|,|A_2(t_1,t_2)|\right)$. Поэтому будем рассматривать замкнутую область $H_0=\{(t_1;t_2): u(t_1,t_2)\le 0\}$ (Рисунок 1).

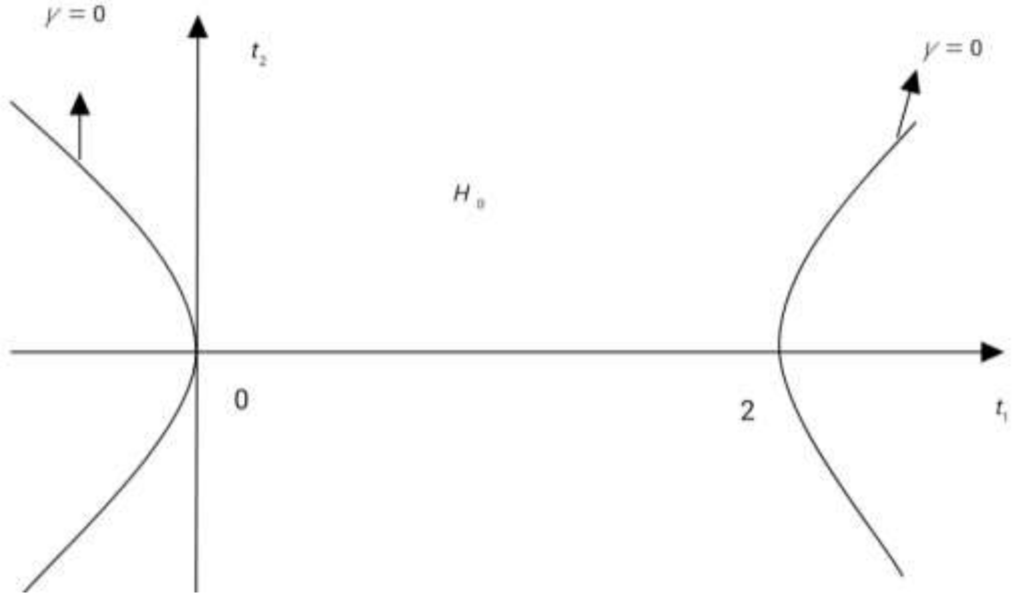

Рисунок 1. Область H_0.

Если $(t_1,t_2)\in H_0$, то $\left| x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1+it_2}(s-1)ds\right)\right| = O(\varepsilon)$.

Для того, чтобы последовательные приближения были ограниченными величинами, необходимо выполнение, условия $u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\le 0$ то есть путь интегрирования должен быть таким как убывающим от начальной точки до последней точки. Таким образом, путь интегрирования будем выбирать так, чтобы имело место неравенство

$$u(t_1,t_2)\le u(\tau_1,\tau_2) \tag{6}$$

от начальной точки до конечной точки (t_1,t_2). Это есть главное требование на выбор пути интегрирования для последовательных приближений. Для всех последовательных приближений путь интегрирования будет неизменным.

Пусть $u(t_1,t_2)=\gamma$ $\left(\left(t_1^2-2t_1-t_2^2\right)=2\gamma\right)$ где γ — действительное число. Если $\gamma>0$, то гиперболы будут расположены правее от особой критической линии $u(t_1,t_2)=0$. Если $-1<\gamma<0$, то гиперболы будут расположены левее от особой критической линии $u(t_1,t_2)=0$. Если $\gamma=-1$ то гиперболы вырождаются на прямые $t_2=\pm(t_1-1)$. Если $\gamma<-1$, то гиперболы будет расположен верх (вниз) между двух прямых $t_2=\pm(t_1-1)$ (Рисунок 2).

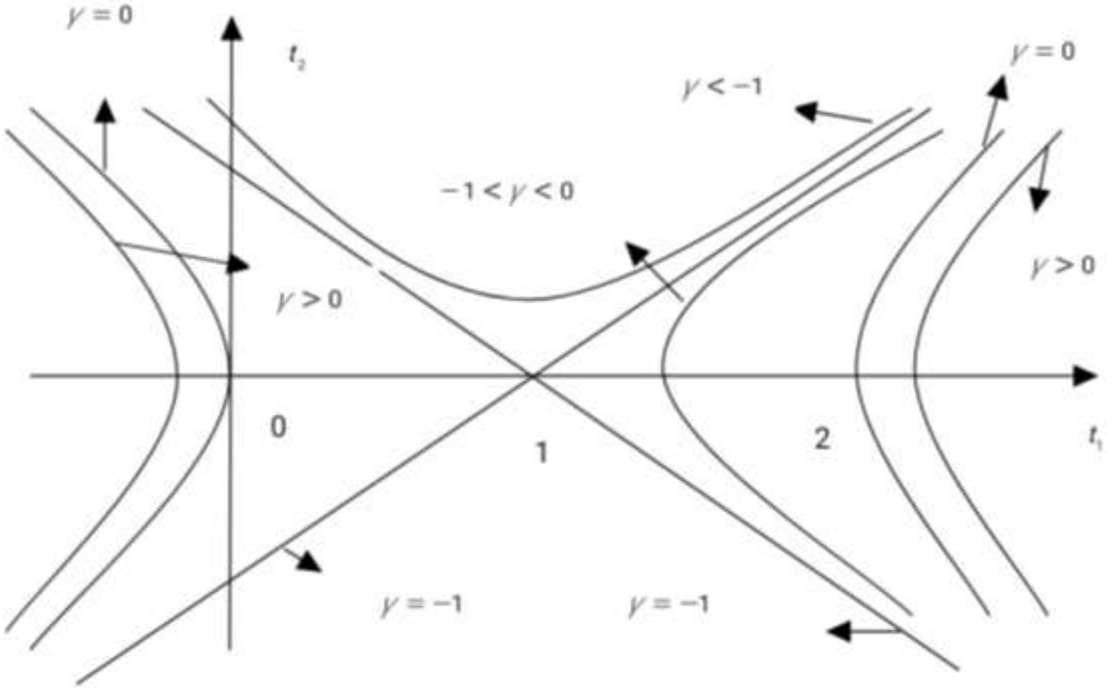

Рисунок 2. Расположения линий уровня в области H_0.

Для любой гиперболы $u(t_1,t_2)=\gamma$ прямой $t_2=t_1-1$ или $t_2=-t_1+1$ является асимптотой.

Для нас особый интерес представляют поведения решение на отрезке $1\le t_1\le 2$.

Пусть область H множество точек (t_1,t_2) ограничившим с левой стороны полу прямыми $t_2=\pm\left(t_1-1+\sqrt{\varepsilon}\right)$ $\left(1-\sqrt{\varepsilon}\le t_1<+\infty\right)$ с правой стороны ограничена полу прямыми $t_2=\pm(t_1-2)$ ($2\le\tau_1<+\infty$). $H=H_1\cup H_2$, где $H_1=\{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H\,u\;t_2\ge 0\}$, $H_2=\{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H\,u\;t_2\ge 0\}$. Справедливо: $H_1\cap H_2=[1,2]$; H_1 , H_2 — симметрично относительно действительной оси Ot_1 и обе бесконечные области.

Решение задачи будем оценивать в замкнутой области H_1. Если пути интегрирования симметричны то сразу получим, оценку решения задачи в H_2 . Таким образом, будем оценивать решение задачи в области H_1 . Сначала определим убывающий путь интегрирование для замкнутой области H_1.

Пусть $(t_1,t_2)\in H_1$. Тогда $t_1-1\ge 0$, $t_2\ge 0$; $(t_1-1)+t_2\ge t_1-1$. Между двумя линиями уровня $u(t_1,t_2)=0$; $u(t_1,t_2)=-\gamma$ при $t_2=0$ имеет место неравенство $1\ge t_1-1\ge 1-2\gamma$. Линия уровня $u(t_1,t_2)=0$ равносильно равенству $(t_1-1)^2-t_2^2=1$или $t_1^2-2t_1-t_2^2=0$, а также линии уровня $u(t_1,t_2)=-\gamma$ равносильны равенствам $(t_1-1)^2-t_2^2=1-2\gamma$ или $t_1^2-2t_1-t_2^2=-2\gamma$. Между двумя линиями уровни лежат части искомой линии K.

Через Γ обозначим множество точек гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ на плоскости, а через Γ_1 обозначим правую половину гиперболы $u(t_1,t_2)=0$: $\Gamma_1=\Gamma\cap H_1$. Две линии гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ и прямой $t_1+t_2=2$ пересекаются в единственной точке $(2,0)$:

$$\begin{cases}u(t_1,t_2)=0\\ t_1+t_2=2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}(t_1-1)^2-t_2^2=1\\ t_1+t_2=2\end{cases}.$$

Запишем в виде

$$\begin{cases}(t_1-1)-t_2=\dfrac{1}{(t_1-1)+t_2}\\ t_1+t_2=2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}(t_1-1)-t_2=1\\ t_1+t_2=2\end{cases}.$$

Отсюда получим единственную точку пересечения двух линий $(2{,}0)$. По вертикальной прямой точки гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ лежат выше (не ниже) чем соответствующие точки прямой $t_1+t_2=2$. Поэтому для точек гиперболы имеет место неравенство $(t_1-1)+t_2\geq 1$. Таким образом, для точек гиперболы Γ_1 справедливо неравенство: из $(t_1-1)^2-t_2^2=1$ получим $(t_1-1)-t_2=\dfrac{1}{(t_1-1)+t_2}\leq\dfrac{1}{1}=1$ или $(t_1-1)-t_2\leq 1$. Отсюда $t_1-2\leq t_2$.

По вертикальной прямой точки гиперболы Γ_1 лежат выше (не ниже), чем соответствующие точки прямой $t_1-t_2=2$ ($(t_1-1)-t_2=1$); по горизонтальной прямой точки гиперболы Γ_1 лежат левее чем соответствующие точки прямой.

Таким образом рассмотрим прямую $t_2=t_1-2$, по которой спускается $+\infty$ (плюс бесконечность) до точки (τ_1,τ_2), $\tau_2=t_2$, $\tau_1=t_2+2$, (t_1,t_2) — конечная точка на области H_1. По прямой $\tau_2=\tau_1-2$ от начальной точки $(2{,}0)$ до ($\tau_1=+\infty$, $\tau_2=\tau_1-2=+\infty$) путь возрастающий. Нам нужен обратный путь. Следовательно, нужный нам путь будет убывающим. Далее от точки $(\tau_1,\tau_2)=(t_1+2,t_2)$ по горизонтальной прямой до точки (t_1,t_2). Это есть последний отрезок пути. $l_3=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=t_2;t_2+2\geq\tau_1\geq t_1\}$. Таким образом, путь интегрирования для всех последовательных приближений будет неизменным: $l=l_0\cup l_1\cup l_2\cup l_3$, где

$$\begin{aligned}&l_0=\left[0.1-\sqrt{\varepsilon}\right],\\ &l_1=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1-1+\sqrt{\varepsilon},1-\sqrt{\varepsilon}\leq\tau_1<+\infty\},\\ &l_2=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1-2,+\infty>\tau_1\geq t_2+2\},\\ &l_3=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=t_2,t_2+2\geq\tau_1\geq t_1\}.\end{aligned}$$

Во всех выше указанных пути интегрировании условия (6) выполняется.

Из (5) оценим последовательных приближений на замкнутой области H_1.

$$x_{11}(t,\varepsilon)=x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda(s)ds\right)+\int_0^t h_1(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Здесь $\operatorname{Re}\int_0^t\lambda(s)ds=\dfrac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-t_2^2-1\right]\equiv u(t_1,t_2)\leq 0$ при $(t_1,t_2)\in H_0=H_1\cup H_2$.

Поэтому $|A_1(t,\varepsilon)|=\left|x_1^0(\varepsilon)\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda(s)ds\right)\right|=O(\varepsilon)$ при $(t_1,t_2)\in H_1$. Остается оценивать величины $I_1(t,\varepsilon)=\int_0^t h_1(\tau)\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau$. Предположим, что $|h_1(\tau)|=O(1)$ при $(t_1,t_2)\in H_1$.

Тогда $|I_1(t,\varepsilon)|=O(1)\int_l\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|$, где $l=l_0\cup l_1\cup l_2\cup l_3$.

1). Будем оценивать величины

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|.$$

Пусть $t\in\left[0,1-\sqrt{\varepsilon}\right]$. Тогда

$$u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-(\tau_1-1)^2\right]=\frac{1}{2}\left[(t_1-\tau_1)(t_1+\tau_1-2)\right]\le\frac{1}{2}\left[(2t_1-2)(t_1-\tau_1)\right]\le$$

$\le-\sqrt{\varepsilon}(t_1-\tau_1)=\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-t_1)$. Таким образом

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|\le\int_0^{t_1}\exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}(\tau_1-t_1)\right)d\tau_1=\sqrt{\varepsilon}\exp\left(\frac{(\tau_1-t_1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\Bigg|_0^{t_1}=$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\left[1-\exp\left(-\frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Получена окончательная оценка

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

2). Рассмотрим интеграл

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $l_1=\{(\tau_1,\tau_2):1-\sqrt{\varepsilon}\le\tau_1<+\infty,\tau_2=\tau_1-1+\sqrt{\varepsilon}\}$.

$u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2-\tau_2^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[2(\tau_1-1)\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon-1\right]$.

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\times$$

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\times$$

$$\cdot\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}\exp\left(\frac{-2\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-1)-\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b}\exp\left(\frac{-2\varepsilon(\tau_1-1)-\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)d\tau_1.$$

Пусть $b-const$, $1-\sqrt{\varepsilon}<b<+\infty$. Тогда

$$\sqrt{2}\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)d\tau_1=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{2}\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b}\exp\left(\frac{-2\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-1)-\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1=-\sqrt{2\varepsilon}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{-2\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-1)-\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\Bigg|_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b}=\sqrt{2\varepsilon}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)-\exp\left(\frac{-2\sqrt{\varepsilon}(b-1)-\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\right]=\sqrt{2\varepsilon}\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(1-\sqrt{\varepsilon},0)}{\varepsilon}\right)-\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(b,b-1+\sqrt{\varepsilon})}{\varepsilon}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2\varepsilon}\left[O(1)-O(1)\right]=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Здесь оценка от величины b не зависит. Таким образом, получим оценку

$$\int_{l_1}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau|=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Теперь вычислим интеграл $\int_{l_2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|$ где

$$l_2=\{(t_1,t_2):+\infty>\tau_1\geq 2,\tau_2=\tau_1-2\},$$

$$u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2-\tau_2^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2-(\tau_1-2)^2-1\right]=\tau_1-2.$$

Пусть $\infty>b>0$, $b-const$. Рассмотрим интеграл $\int_b^{t_2+2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|$. Здесь $\tau_2=\tau_1-2$, $d\tau_2=d\tau_1$, $|d\tau|=\sqrt{2}d\tau_1$, $u(\tau_1,\tau_2)=\tau_1-2$.

Поэтому

$$\int_b^{t_2+2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_b^{t_2+2}\exp\left(\frac{2-\tau_1}{2\varepsilon}\right)d\tau_1=$$

$$=-2\sqrt{2}\varepsilon\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\exp\left(\frac{2-\tau_1}{2\varepsilon}\right)\Bigg|_b^{t_2+2}=\sqrt{8}\varepsilon\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\left[\exp\left(\frac{2-b}{2\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{t_2}{2\varepsilon}\right)\right]=\sqrt{8}\varepsilon\left[\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(b,b-2)}{\varepsilon}\right)-\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(t_2+2,t_2)}{\varepsilon}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{8}\varepsilon\left[O(1)-O(1)\right]=O(\varepsilon).$$

Таким образом, получена оценка

$$\int_{l_2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=O(\varepsilon).$$

Остается вычислить интеграл

$$\int_{l_3}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь

$$l_3=\{(\tau_1,\tau_2:\tau_2=t_2,t_2+2\geq\tau_1\geq t_1)\},$$

$$u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-(\tau_1-1)^2\right]\leq-(t_1-1)(\tau_1-t_1).$$

Получен следующий интеграл

$$\int_{l_3}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\cdot|d\tau|\leq\int_{l_3}\exp\left(-\frac{(t_1-1)(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1.$$

Рассмотрим два случая:

1). Пусть $\sqrt{\varepsilon} \le t_1 - 1$. Здесь $0 < b - const$:

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right) \cdot |d\tau| \le \int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(t_1-1)(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right) \cdot |d\tau_1| =$$

$$= \begin{cases} O(\varepsilon), при\ t_1 \in (\delta;2], \\ O(\sqrt{\varepsilon}), при\ t_1 \in [1+\sqrt{\varepsilon};\delta]. \end{cases}$$

2). Случай $1-\sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le 1+\sqrt{\varepsilon}$. Тогда будем иметь

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right) |d\tau| = O(1) \int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{\varepsilon}\right) \cdot |d\tau_1| =$$

$$= O(1) \int_{t_1}^{t_2+2} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{\varepsilon}\right) d\tau_1 .$$

Пусть $\dfrac{\tau_1 - 1}{\sqrt{2\varepsilon}} = s$. Тогда

$$\tau_1 = 1 + \sqrt{2\varepsilon} s,\ d\tau_1 = \sqrt{2\varepsilon} ds,\ \tau_1 = t_1,\ s_1 = \frac{t_1 - 1}{\sqrt{2\varepsilon}},\ \tau_1 = t_2 + 2,\ s_2 = \frac{t_2 + 1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

$$\sqrt{2\varepsilon} \int_{s_2}^{s_1} \exp(-s^2) ds \le 2\sqrt{2\varepsilon} \int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \sqrt{2\varepsilon\pi} .$$

Рассмотрим $l_3 = \{(\tau_1,\tau_2) : \tau_2 = t_2, t_2 + 2 \ge \tau_1 \ge t_1\}$. Пусть

$\bar{T} = \{(t_1,t_2) : 1-\sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le 1, t_2 = t_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\}$,

$T = \{(t_1,t_2) : 1-\sqrt{\varepsilon} \le t_1 < 1, t_2 = t_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\}$,

$H_{10} = H_1 \setminus T$.

Заметим, что если $(t_1,t_2) \in H_{10}$, то величина $u(t_1,t_2)$ убывает по пути l_3. Если $(t_1,t_2) \in \bar{T}$, то величина $u(t_1,t_2)$ убывает по пути l_3 при $1 \le t_1 \le t_2 + 2$, возрастает по пути l_3 при $1 \ge t_1 \ge 1-\sqrt{\varepsilon}$. Это на оценки решения существенно не влияет. Пусть $(t_1,t_2) \in \bar{T}$. Тогда будем иметь по пути l_3:

$$\int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right) \cdot |d\tau| = \int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(\frac{(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right) \cdot d\tau_1 =$$

$$= \int_{t_2+2}^{1} \exp\left(\frac{(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right) d\tau_1 + \int_{1}^{t_1} \exp\left(\frac{(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right) d\tau_1 .$$

Пусть $(t_1,t_2) \in \bar{T}$. Тогда $|t_1 - 1| \le \varepsilon$, при $1 \ge \tau_1 \ge t_1 \ge 1-\sqrt{\varepsilon}$, $|\tau_1 - 1| \le \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому

$$\int_{1}^{t_1} \exp\left(\frac{(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right) d\tau_1 = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\int_{t_2+2}^{1} \exp\left(\frac{(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right) d\tau_1 = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Учтено, что интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} \exp\left(-s^2\right) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. В итоге получена оценка

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Для первого приближения $x_{11}(t,\varepsilon)$ справедлива оценка $|x_{11}(t,\varepsilon)| = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $(t_1,t_2)\in H_1$.

Таким образом, имеет место оценка, если $(t_1,t_2)\in H_1$, то

$$|x_{11}(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon} \tag{7}$$

где $0 < c - const$.

Аналогично оценка (8) верна для $|x_{21}(t,\varepsilon)|$.

Рассмотрим прямую $\tau_2 = \tau_1 - 2$. Далее рассмотрим особую критическую линию.

$u(t_1,t_2) = 0$ или $(t_1-1)^2 - t_2^2 = 1$.

Особая критическая линия и прямая $t_2 = t_1 - 2$ имеет единственную общую точку $(2,0)$ (точка пересечения двух линий есть $(2,0)$). Для точек особой критической линии принадлежащих на H_1 справедливо неравенство $(t_1-1)+t_2 \ge 1$. Поэтому для точек особой критической линии $u(t_1,t_2)=0$ имеет место $(t_1-1)-t_2 = \frac{1}{(t_1-1)+t_2} \le \frac{1}{1} = 1$. Или $(t_1-1)-t_2 \le 1$, $t_1 - 2 \le t_2$. Таким образом, по горизонтали точки особой критической линии $u(t_1,t_2)=0$ лежит левее от соответствующей точки прямой $t_2 = t_1 - 2$. По вертикали точки гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ лежит не ниже (выше), чем соответствующие точки прямой $t_2 = t_1 - 2$.

Таким образом, оценка (8) имеет место для всех точек замкнутой области H_1. Аналогично для области H_2 имеет место оценка (8).

Теперь рассмотрим сходимости последовательных приближений . Если $(t_1,t_2)\in H$, то справедлива оценка

$$\|x_1(t,\varepsilon)\| \le C\sqrt{\varepsilon},\ 0 < c - const. \tag{8}$$

В дальнейшем, положительные постоянные величины, которые в рассуждениях существенной роли не играют, и поэтому обозначим одной той же буквой C. Тогда

$$\|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\| \le M\int_l \|x_1(\tau,\varepsilon)\| \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| \le$$

$$\le MC\sqrt{\varepsilon}\int_l \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| \le \left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2.$$

Получим

$$\|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\| \le \left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2 \tag{9}$$

Далее, имеет место оценка

$$\left\| x_n(t,\varepsilon) - x_{n-1}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(C\sqrt{\varepsilon} \right)^n, \ (n = 1,2,...) \tag{10}$$

Из (8)-(10) при условии $C\sqrt{\varepsilon} < 1$ следует, что последовательность функций $x_n(t,\varepsilon)$ в области H равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon) \in Q(H)$, которая является решением (4). Единственность решения обеспечивается условием $U1$. Теорема доказано.

Результаты и обсуждения

Линии уровня $u(t_1,t_2) = -1$ делят область H_0 на четыре части. Три из них соответствуют устойчивому интервалу собственных значений. Используя условия устойчивости, получить оценку решений задач (1)-(2) на этих трех областях, не является сложным. Особый интерес вызывает неустойчивый отрезок $[1,2]$. Поэтому решения задач (1)-(2) оценим в области H, которой обхватывает отрезок $[1,2]$. Выбираем пути интегрирования, учитывая условие (6), в итоге получим оценку решения задач (1)-(2).

Выводы

Случай, когда нули собственных значений лежат в действительной оси раньше не рассматривался. Потому что, не выполняется явление затягивание потери устойчивости [3]. Оказалось, что существует убывающие пути интегрирования, и переход к неустойчивому интервалу осуществляется бесконечно удаленной точке. Здесь используем понятие проективной геометрии о параллельных прямых.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001. 376 с.

2. Акматов А. А. Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 24-31. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

3. Акматов А. А. Кичине козголуунун сингулярдык козголгон тендеменин чечиминин туруктуулугунун узартылышына тийгизген таасири // ОшМУ жарчысы. 2023. С. 163-168.

4. Каримов С., Акматов А. А., Ысакова М. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Естественные и технические науки. 2006. №2. С. 14.

5. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2017. С. 180-280.

6. Турсунов Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Ош, 2014. С. 52-132.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: diss. … d-ra fiz.-mat. nauk. Dzhalal-Abad. (in

Т. 10. №1. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/98

Russian).

2. Akmatov, A. (2022). Asymptotics of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 5*(5), 24-31. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

3. Akmatov A. A. (2023). Vliyanie malogo vozbuzhdeniya na rasshirenie ustoichivosti resheniya singulyarno vozbuzhdennogo uravneniya. *Vestnik OshMU,* 163-168.

4. Karimov, S., Akmatov, A. A., & Ysakova, M. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (2), 14. (in Kyrgyz).

5. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami: diss. … d-ra fiz.-mat. nauk. Dzhalal-Abad. (in Russian).

6. Tursunov, D. A. (2014). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennykh obyknovennykh i ellipticheskikh differentsial'nykh uravnenii: diss. … d-ra fiz.-mat. nauk. Osh. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 19.12.2023 г.

Принята к публикации 24.12.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А. Асимптотика решений сингулярно возмущенной задачи // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №1. С. 12-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/01

Cite as (APA):

Akmatov, A. (2024). Asymptotics of Solutions to a Singularly Perturbed Problem. *Bulletin of Science and Practice, 10*(1), 12-22. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/01