ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

ЯВЛЕНИЕ ЗАТЯГИВАНИЯ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

©Алыбаев К. С., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
©Нурматова М. Н., *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-код: 2628-2591, Жалал-Абадский государственный университет, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, nurmatova_mairamgul@mail.ru*

THE PHENOMENON OF DELAYING LOSS OF STABILITY IN THE THEORY OF SINGULAR PERTURBATIONS

©Alybaev K., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil., Jalal-Abad State University Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
©Nurmatova M., *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-code: 2628-2591, Jalal-Abad State University, Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, nurmatova_mairamgul@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается автономная система сингулярно возмущенных уравнений быстрых переменных, состоящая из четырех уравнений первого порядка и одного уравнения медленной переменной. Матрица первого приближения имеет попарно комплексно-сопряженные собственные функции. Система имеет положение равновесия, причем, устойчивость положения равновесия теряется при некотором значении медленной переменной. В этой точке действительные части всех собственных функций обращаются в нуль. В ранних работах рассмотрены случаи, когда устойчивость положения равновесия теряется одной парой комплексно-сопряженных собственных функций. Решена задача на явление затягивание потери устойчивости положения равновесия.

Abstract. This paper considers an autonomous system of singularly perturbed equations of fast variables, consisting of four first-order equations and one equation of a slow variable. The first approximation matrix has pairwise complex conjugate eigenfunctions. The system has an equilibrium position, and the stability of the equilibrium position is lost at a certain value of the slow variable. At this point, the real parts of all eigenfunctions vanish. Early works considered cases when the stability of the equilibrium position is lost by one pair of complex conjugate eigenfunctions. The problem of the phenomenon of prolongation of the loss of stability of the equilibrium position has been solved.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, положение равновесия, точка поворота, линии уровней, устойчивость.

Keywords: singular disturbance, equilibrium position, turning point, level lines, stability.

Постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + F\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый вещественный параметр; $t \in \mathcal{D} \subset \boldsymbol{C}$, а $\mathcal{D}$ — односвязная, открытая, ограниченная область, $z = colon(z_1, \dots, z_n)$, $F = (F_1, \dots, F_n)$,

$$\|F(t,z)\| = o(\|z\|).$$

Пусть матрица $A(t)$ имеет n различных собственных значений $\lambda_j(t)(j = 1,2,\dots,n)$ причем, среди $\lambda_j(t)$ имеется, хотя бы одно собственное значение, которая в некоторой точке $t = \mathrm{T}_0 \in \mathcal{D}$ имеет нуль (кратность нуля не имеет значение).

Если выполняется это условие, то будем говорить, что уравнение (1) с одной или несколькими точками поворота.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(y)\tilde{z}(t,\varepsilon) + \tilde{z}(t,\varepsilon)\big(\tilde{z}(t,\varepsilon), \tilde{z}(t,\varepsilon)\big)^{1+\alpha}, \tag{2}$$

$$y' = 1, \tag{3}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый вещественный параметр, $z = colon(z_1, \dots, z_4)$, $\tilde{z} = colon(z_1 - y, z_2, z_3 - y, z_4)$,

$$(\tilde{z},\tilde{z}) = (z_1 - y)^2 + z_2^2 + (z_3 - y)^2 + z_4^2, \alpha > 0,$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix}, \quad A_1(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}, \quad A_2(y) = \begin{pmatrix} y & -2 \\ 2 & y \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(y)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(y) = y \pm i$, $\lambda_{3,4}(y) = y \pm 2i$, причем $\lambda_{1,2}$ в точке $\pm i$, а $\lambda_{3,4}$ в точке $\pm 2i$ имеет нулей. Следовательно, эти точки являются точками поворота.

Уравнение (2), в точке $(y, 0, y, 0)$, имеет положение равновесие. Это положение равновесие устойчива при $y < 0$ и неустойчива при $y > 0$, т.е. при переходе значения y через 0 устойчивость положения равновесия теряется.

Если $z(y,\varepsilon)$ — решение задачи (2) - (4) остается ограниченным на некотором отрезке $[-y_0, y_1]$ $(y_0 > 0, y_1 > 0)$, то будем говорить, что происходит явление затягивание потери устойчивости положения равновесия.

Задача. Исследовать решение $z(y,\varepsilon)$ на явление затягивание потери устойчивости положения равновесия. Аналогичные задачи, когда устойчивость положения равновесия теряется одной парой комплексно-сопряженных собственных значений исследовались ранее [1–5].

Решение задачи выражается следующей теоремой:

Теорема. $z(t,\varepsilon)$ — решение задачи существует на отрезке $\left[t_0,\ 2\sqrt{4 - t_0^2} - 4 + t_0^2\right]$ $(-\sqrt{3} < t_0 < 0;\ 0 < 2\sqrt{4 - t_0^2} - 4 + t_0^2 < 1)$ и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = (y, 0, y, 0),$$

т.е. происходит явление затягивание потери устойчивости.

Доказательство теоремы разделим на несколько частей:

Т. 9. №12. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/97

1. Преобразование исходного уравнения.

Решение уравнения (3) возьмем в виде $y = t$, и в системе (2), последовательно проведя замену неизвестных функций:

$$z_1 - y = u_1,\ z_2 = u_2,\ z_3 - y = u_3, z_4 = u_4;$$
$$u_1 + iu_2 = v_1, u_1 - iu_2 = v_2, u_3 + iu_4 = v_3, u_3 - iu_4 = v_4$$

систему (2) приведем к следующему виду:

$$\varepsilon v' = \Lambda(t)v + \mathrm{V}v - \varepsilon a \tag{5}$$

с начальным условием

$$v(t_0, \varepsilon) = v^0, \tag{6}$$

где $v = colon(v_1, v_2, v_3, v_4), \Lambda(t) = diag(t + i, t - i, t + 2i, t - 2i)$,
$\mathrm{V} = v_1 \cdot\ v_2 + v_3 \cdot v_4, a = colon(1, 1, 1, 1)$.

В (6) будем считать $\|v^0\| \le M_0\varepsilon$. Здесь и далее буквами $M_0, M_1, M_2, \ldots$ будем обозначать положительных постоянных не зависящих от ε. Задачу (5) - (6) заменим следующим:

$$v = E(t, t_0, \varepsilon)v^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[\mathrm{V}v - \varepsilon a]\, E(t, \tau, \varepsilon)d\tau, \tag{7}$$

где $E(t, t_0, \varepsilon) = diag(exp\frac{1}{2\varepsilon}((t + i)^2 - (t_0 + i)^2),\ exp\frac{1}{2\varepsilon}((t - i)^2 - (t_0 - i)^2),$ $exp\frac{1}{2\varepsilon}((t + 2i)^2 - (t_0 + 2i)^2), exp\frac{1}{2\varepsilon}((t - 2i)^2 - (t_0 - 2i)^2))$.

В (7) будем считать $t = t_1 + it_2$, где t_1, t_2 –действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$. Асимптотическое поведение решения (7) исследуем в некоторой области $t \in \mathcal{D} \subset C$ - множество комплексных чисел, причем $[t_0, \mathrm{T}] \subset \mathcal{D}$ и $t_0 < 0, 0 < \mathrm{T}$, t_0, T – не зависят от ε.

2. Геометрические построения.

Для определения области $\mathcal{D}$ используем функции

$$A_1(t) = (t + i)^2,\ A_2(t) = (t - i)^2,\ A_3(t) = (t + 2i)^2,\ A_4(t) = (t - 2i)^2.$$

Рассмотрим функции $ReA_1(t),\ ReA_2(t), ReA_3(t),\ ReA_4(t)$.

Имеем

$$ReA_1(t) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2,\ ReA_2(t) = t_1^2 - (t_2 - 1)^2,$$
$$ReA_3(t) = t_1^2 - (t_2 + 2)^2,\ ReA_4(t) = t_1^2 - (t_2 - 2)^2.$$

Справедливо предложение:

Π_1. В точках симметричных относительно действительной оси функции $ReA_1(t)$ и $ReA_2(t)$, $ReA_3(t)$ и $ReA_4(t)$ принимают равные значения.

Таким образом, для определения области $\mathcal{D}$, достаточно рассмотреть функции $ReA_1(t)$ и $ReA_3(t)$. Введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_{10}) = \{t \in \boldsymbol{C},\ t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = 0\},$$
$$(p_{20}) = \{t \in \boldsymbol{C}, t_1^2 - (t_2 + 2)^2 = 0\}.$$

Линия (p_{10}) разветвляется в точке $(-1, 0)$, а (p_{20}) разветвляется в точке $(-2, 0)$ и плоскость $\boldsymbol{C}$ разделяют на четыре сектора (Рисунок 1).

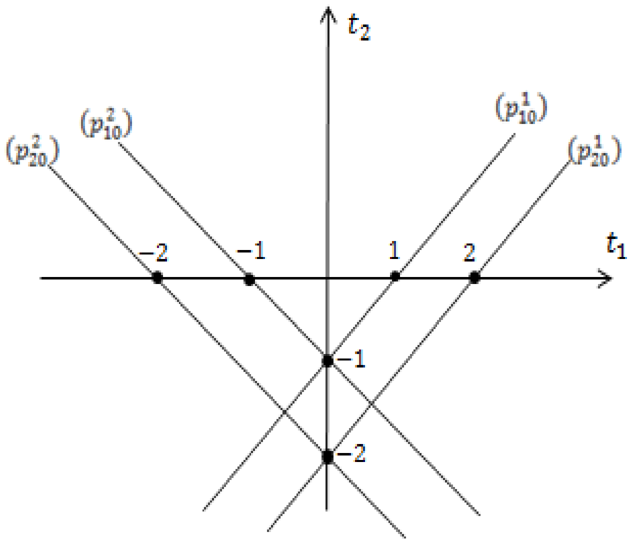

Рисунок 1. Деление плоскости $\boldsymbol{C}$ линиями (p_{10}) и (p_{20})

Ветви (p_{10}) обозначим (p_{10}^1), (p_{10}^2); (p_{20}) обозначим (p_{20}^1), (p_{20}^2) (Рисунок). На определение области определенное влияние оказывает также t_0. Рассмотрим следующие случаи:

1. $-\sqrt{3} < t_0 < 0$;
2. $t_0 = -\sqrt{3}$;
3. $t_0 < -\sqrt{3}$.

При доказательстве существования и ограниченности решения (7) основная роль принадлежит предложению Π_2.

Π_2. Пусть существует область $\mathcal{D} \subset \boldsymbol{C}$ и множество $\{(p(t_0,t))$ – путь соединяющая точку t_0 с произвольной точкой $t \in \mathcal{D}\}$ и функции $ReA_1(t)$ и $ReA_3(t)$ не возрастают по путям $(p(t_0,t))$. Тогда функции

$F_{11}(t_0,t,\varepsilon) = exp\frac{A_1(t)-A_1(t_0)}{\varepsilon}$, $\quad F_{31}(t_0,t,\varepsilon) = exp\frac{A_3(t)-A_3(t_0)}{\varepsilon}$,

$F_{12}(t_0,t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{A_1(t)-A_1(\tau)}{\varepsilon}d\tau$, $\quad F_{32}(t_0,t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{A_3(t)-A_3(\tau)}{\varepsilon}d\tau$

ограничены по модулю при $\varepsilon \to 0$.

Докажем Π_2. Пусть $(p(t_0,t))$ состоит из двух, взаимно не пересекающихся простых дуг Жордана $(p_1(t_0,T))$ и $(p_2(T,t))$. Тогда $(p_1(t_0,T))$ имеет параметрическое представление

$t = \varphi_1(s)$, где s: $\alpha_1 \le s \le \alpha_2$.

$(p_2(T,t))$ имеет представление $t = \varphi_2(\sigma)$, где $\alpha_3 \le \sigma \le \alpha_4$, причем

$\forall s_1, s_2 \in [\alpha_1,\ \alpha_2] \wedge s_1 \neq\ s_2\ (\varphi_1(s_1) \neq \varphi_1(s_2))$.

$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in [\alpha_3,\ \alpha_4] \wedge \sigma_1 \neq\ \sigma_2\ (\varphi_2(\sigma_1) \neq \varphi_2(\sigma_2))$,

$\varphi_1(\alpha_2) = \varphi_2(\alpha_3),\ \varphi_1(\alpha_1) \neq \varphi_2(\alpha_4)$.

$\forall s \in [\alpha_1,\ \alpha_2] \wedge \forall \sigma \in [\alpha_3,\ \alpha_4]\ (\varphi_1(s) \neq \varphi_2(\sigma))$.

Пусть по $(p_1(t_0,T))$ функции $ReA_1(t)$ постоянна, $ReA_3(t)$ убывает, а по $(p_2(T,t))$ функция $ReA_1(t)$ убывает, $ReA_3(t)$ постоянна. Отметим, возможны и другие варианты, которые рассматриваются аналогичным образом.

Сначала рассмотрим функции $F_{11}(t_0,t,\varepsilon)$, $F_{12}(t_0,t,\varepsilon)$.

$$\forall t \in (p_1(t_0,T))\ (ReA_1(t) = const) \Rightarrow ReA_1(t) - ReA_1(t_0) = 0 \Rightarrow |F_{11}(t_0,t,\varepsilon)| = 1.$$

$$\forall \tau \in (p_2(T,t))\ \left(ReA_1(t) \le ReA_1(\tau) \le ReA_1(T) = ReA_1(t_0)\right) \Rightarrow ReA_1(t) - ReA_1(t_0) \le 0$$

$$\Rightarrow |F_{11}(\,t_0, t, \varepsilon)| = exp\big(ReA_1(t) - ReA_1(t_0)\big) \le 1.$$

Для $F_{11}(\,t_0, t, \varepsilon)$ предложение Π_2 доказано. Теперь рассмотрим функцию $F_{12}(\,t_0, t, \varepsilon)$.

$$\forall \tau, t \in \big(p_1(t_0, T)\big)\ \big(ReA_1(\tau) = ReA_1(T)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{p_1(t_0,t)} exp\,\frac{1}{\varepsilon}\big(A_1(t) - A_1(\tau)\big)d\tau\right| \le l_1 = \text{длина } p_1(t_0, T)$$

$$\forall \tau \in \big(p_2(T, t)\big)\ \big(ReA_1(t) \le ReA_1(\tau)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{p_2(T,t)} exp\,\frac{1}{\varepsilon}\big(A_1(t) - A_1(\tau)\big)d\tau\right| \le l_2 = \text{длина } p_2(T, t).$$

Предложение Π_2 доказано для $F_{12}(\,t_0, t, \varepsilon)$.

Для $F_{31}(\,t_0, t, \varepsilon)$ и $F_{32}(\,t_0, t, \varepsilon)$ предложение Π_2 доказывается аналогично.

Пусть рассматривается случай 1. $-\sqrt{3} < t_0 < 0$.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_3) = \{t \in C,\ t_1^2 - (t_2 + 2)^2 = \ t_0^2 - 4\}.$$

Линия (p_3) проходит через точки $(t_0, 0)$, $\left(0, -2 + \sqrt{\ 4 - t_0^2}\right)$, $(-t_0, 0)$. Далее рассмотрим, часть (p_3), соединяющая точки $(t_0, 0)$ и $\left(0, -2 + \sqrt{4 - t_0^2}\right)$. По условию $-\sqrt{3} < t_0 < 0$. Тогда $-2 + \sqrt{\ 4 - t_0^2} > -1$.

Уравнение (p_3) можно записать в виде

$$t_2 = -2 + \sqrt{\ t_1^2 + 4 - t_0^2},\ t_0 \le t_1 \le 0. \qquad (K_1)$$

Имеем

$$ReA_1(t) = \ t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = \ t_1^2 - \left(-1 + \sqrt{\ t_1^2 + 4 - t_0^2}\right)^2 = -1 + 2\sqrt{\ t_1^2 + 4 - t_0^2} - 4 + \ t_0^2.$$

Отсюда получим

$$\big(ReA_1(t)\big)'_{t_1} = \frac{2t_1}{\sqrt{t_1^2 + 4 - t_0^2}}.$$

Таким образом, функция $ReA_1(t)$ убывает вдоль кривой (K_1). Функция $ReA_3(t)$ постоянна вдоль (K_1).

Предложение Π_2 справедлива для $ReA_1(t)$, $ReA_3(t)$ на кривой (K_1).

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_1) = \left\{t \in \boldsymbol{C},\ t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = -\left(-1 + \sqrt{\ 4 - t_0^2}\right)^2\right\}$$

и рассмотрим часть (p_1) соединяющая точки $\left(0, -2 + \sqrt{4 - t_0^2}\right)$ и $\left(2\sqrt{4 - t_0^2} - 4 + t_0^2, 0\right)$. Имеем

$$t_2 = -1 + \sqrt{\ t_1^2 + \left(-1 + \sqrt{\ 4 - t_0^2}\right)^2},\ 0 \le t_1 \le 2\sqrt{4 - t_0^2} -\ 4 + t_0^2. \qquad (K_2)$$

Поставим задачу: будет ли функция $ReA_3(t)$ убывающей по кривой (K_2)?

В выражении для $ReA_3(t)$ вместо t_2, подставляя уравнение (K_2) получим

$$ReA_3(t) = \ t_1^2 - \left(1 + \sqrt{\ t_1^2 + \left(-1 + \sqrt{\ 4 - t_0^2}\right)^2}\right)^2 = -1 - 2\sqrt{\ t_1^2 + \left(-1 + \sqrt{\ 4 - t_0^2}\right)^2} -$$

$$-\left(-1+\sqrt{4-t_0^2}\right)^2=-\left(1+2\sqrt{t_1^2+\left(-1+\sqrt{4-t_0^2}\right)^2}+\left(-1+\sqrt{4-t_0^2}\right)^2\right).$$

Отсюда имеем

$$\left(ReA_1(t)\right)'_{t_1}=-\frac{2t_1}{\sqrt{t_1^2+\left(-1+\sqrt{4-t_0^2}\right)^2}}.$$

Поскольку $0<t_1\leq 2\sqrt{4-t_0^2}-\ 4+t_0^2$, то $ReA_3(t)$ убывают вдоль (K_2).

Таким образом, вдоль (K_2) функция $ReA_3(t)$ убывает, а функция $ReA_1(t)$ постоянна.

Предложение Π_2 верна, на кривой (K_2), для $ReA_3(t)$ и $ReA_1(t)$.

Подведя итог можем сказать: предложение Π_2 справедлива для функций $ReA_1(t)$, $ReA_3(t)$ на кривой $(K_1)\cup(K_2)$. Причем при $t_1=0$ функции $ReA_1(t)$, $ReA_3(t)$ имеют особенности.

Теперь, рассматривая функции $ReA_2(t)$, $ReA_4(t)$ определим кривые $(\overline{K}_1)$ и $(\overline{K}_2)$, которые, соответственно симметричны к кривым (K_1), (K_2) относительно действительной оси.

На кривой $(\overline{K}_1)\cup(\overline{K}_2)$ для функций $ReA_2(t)$, $ReA_4(t)$ справедливо предложение Π_2. Область, ограниченный кривыми $(K_1)\cup(K_2)$ и $(\overline{K}_1)\cup(\overline{K}_2)$ обозначим $\mathcal{D}$ (Рисунок 2).

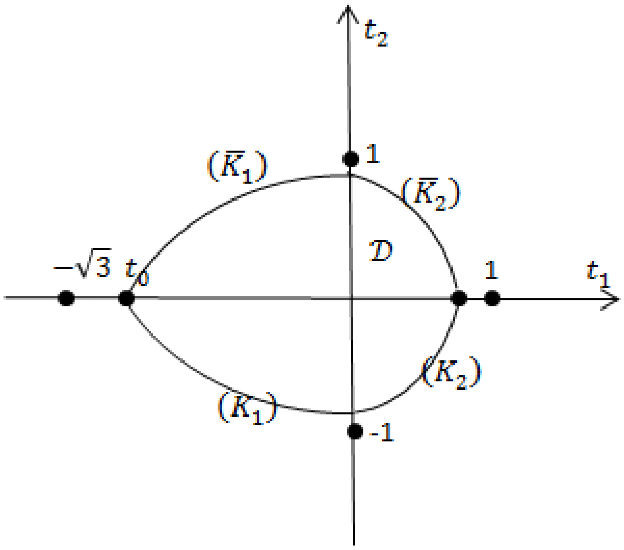

Рисунок 2. Область $\mathcal{D}$

2. Определение последовательных приближений и их оценка.

Для доказательства существования и ограниченности решения уравнения (7), применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом:

$$v_m=E(t,t_0,\varepsilon)v^0+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[\mathrm{V}v_{m-1}-\varepsilon a]\,E(t,\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{8}$$

$$v_0\equiv 0, m=1,2,\dots,t_0,$$
$$v_m=colon(v_{1m},\ v_{2m},\ v_{3m},\ v_{4m}),$$
$$\mathrm{V}=v_1\cdot\ v_2+v_3\cdot v_4, a=colon(1,1,1,1).$$

Сначала приведем асимптотическую оценку по ε, последовательных приближений в области $\mathcal{D}$.

Для реализации этой цели выберем пути интегрирования. Согласно предложения Π_2 на ограниченность последовательных приближений, существенное влияние оказывает функции $ReA_j(t)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Тогда пути интегрирования выберем согласно Π_2.

Поскольку функции $ReA_1(t)$ и $ReA_2(t)$, $ReA_3(t)$ и $ReA_4(t)$ в симметричных точках, относительно действительной оси, принимают равные значения, то выбирая симметричные пути интегрирования для v_{1m} и v_{2m}, v_{3m} и v_{4m} в симметричных областях можно получить одинаковые оценки.

Выберем пути интегрирования v_{1m} и v_{3m} согласно Π_2.

Для v_{1m} и v_{3m} путь интегрирования состоит из части $(K_1) \cup (K_2)$, $[t_0, \tilde{t}]$ и прямолинейного отрезка $[\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2]$, функции $ReA_1(t),\ ReA_3(t)$ убывают.

Действительно, имеем

$$ReA_1(t) = t_1^2 - (\tau_2 + 1)^2, \text{ где } t_1 - const, \tilde{t}_2 \le \tau_2 \le t_2.$$
$$\left(ReA_1(t)\right)'_{\tau_2} = -2(\tau_2 + 1).$$

Согласно выбранных путей интегрирования получим оценки

$$|v_m| \le M_1\varepsilon, t \in \mathcal{D} \tag{9}$$

$t_0 + 1$ – не зависит от ε.

Для доказательства сходимости (8) оценим $|v_m - v_{m-1}|$. Имеем

$$|v_m - v_{m-1}| \le (M_2\varepsilon)^m, m = 1,2, \ldots.$$

Отсюда, при условии $M_2\varepsilon < 1$, (8) сходится равномерно к некоторой функции $v(t, \varepsilon)$, которая является решением (7), и для этого решения справедлива оценка, согласно (9)

$$\|v(t, \varepsilon)\| \le M_1\varepsilon, t \in \mathcal{D} \tag{10}$$
$$\left[t_0, 2\sqrt{4 - t_0^2} - 4 + t_0^2\right] \subset \mathcal{D}.$$

Из (10) вытекает справедливость теоремы.

Примечание. Если $t_0 \to -\sqrt{3} + 0$, то кривая (K_1) вырождается в луч $\{(t_1,\ t_2) \in R^2, t_1 + t_2 + 2 = 0\}$, проходящая через точки $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, -1)$, а кривая (K_2) вырождается в луч $\{(t_1,\ t_2) \in R^2, t_1 - t_2 - 1 = 0\}$ проходящие через точки $(0, -1)$, $(1, 0)$.

Этот случай требует отдельного исследования (случай $t_0 = -\sqrt{3}$).

Случай $t_0 < -\sqrt{3}$ сводится к исследованию случая $t_0 = -\sqrt{3}$.

Список литературы:

1. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.

2. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №2. С. 226-233.

3. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Серия. 2001. Т. 3. С. 190-200.

4. Каримов С. К., Абдилазизова А. А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены

устойчивости // Естественные и технические науки. 2007. №4. С. 13-16.

5. Турсунов Д. А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. №54. С. 46-57.

References:

1. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk, 209*(3), 576-579. (in Russian).

2. Neishtadt, A. I. (1988). O zatyagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. II. *Differentsial'nye uravneniya, 24*(2), 226-233. (in Russian).

3. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU. Seriya, 3*, 190-200. (in Russian).

4. Karimov, S. K., & Abdilazizova, A. A. (2007). Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii singulyarno vozmushchennoi sistemy differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (4), 13-16. (in Russian).

5. Tursunov, D. A. (2018). Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoichivosti tochki pokoya v ploskosti “bystrykh dvizhenii”. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (54), 46-57. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 28.10.2023 г.

Принята к публикации 04.11.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

Cite as (APA):

Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01