

УДК 517.928

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/94/01>

НЕЛИНЕЙНАЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

©Эркебаев У. З., ORCID: 0009-0000-5893-4699, канд. физ.-мат. наук, Ошский
государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, uerkebaev@oshsu.kg

©Сулайманов З. М., Ошский государственный университет,
г. Ош, Кыргызстан, zsulaimanov@oshsu.kg

NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM WITH INNER LAYER

©Erkebaev U., ORCID: 0009-0000-5893-4699, Ph.D., Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan, uerkebaev@oshsu.kg

©Sulaimanov Z., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, zsulaimanov@oshsu.kg

Аннотация. В статье построена асимптотика решения задачи Коши для нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, который является простой математической моделью с внутренним слоем. Для всех теоретических вычислений приведены доказательные вычисления в системе Maple.

Abstract. In the article, the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a nonlinear autonomous ordinary differential equation of the first order, which is a simple mathematical model with an inner layer, is constructed. For all theoretical calculations, evidence-based calculations in the Maple system are given.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, внешнее решение, асимптотическое решение, асимптотическое разложение, задача Коши, метод дифференциальных неравенств Чаплыгина, система Maple.

Keywords: nonlinear differential equation, external solution, asymptotic solution, asymptotic expansion, Cauchy problem, Chaplygin's method of differential inequalities, Maple system.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t)), t \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$y(0) = \varepsilon, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр [1–9].

Правую часть уравнения (1) обозначим через $F(y)$, т. е. $F(y) = y(1 - y)$. Уравнение (1) имеет две точки равновесия (стационарные точки):

$$y(1 - y) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ или } y_2 = 1.$$

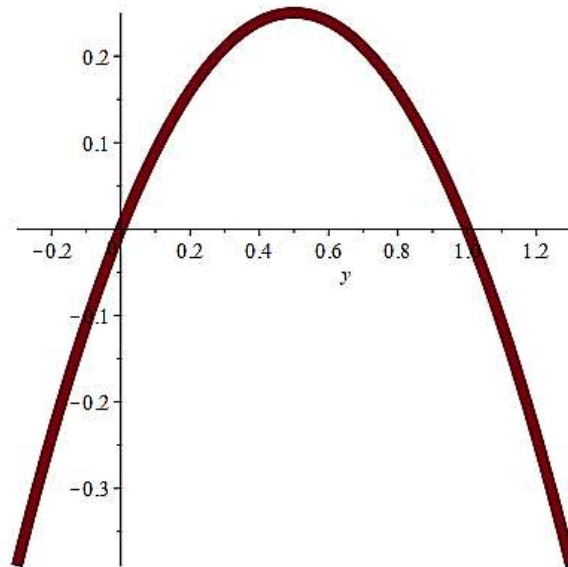
Определим тип этих точек равновесия:

$$F'(y) = (y - y^2)' = 1 - 2y$$

$$F'(y_1)=1-0=1>0; F'(y_2)=1-2=-1<0.$$

Отсюда следует, что точка $y_1=0$ – неустойчивое положение точки покоя, так как $F'(y_1)>0$; а точка $y_2=1$ — устойчивое положение точки покоя, так как $F'(y_2)<0$.

Построим график функций $F(y)$. В двух точках покоя производная искомой функций равна нулю.



Если $y \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, то $y'(t) < 0$; а если $y \in (0; 1)$, то $y'(t) > 0$.

В системе Maple построим точное решение задачи Коши, а также ее график.

Для этого в системе Maple по следующему маршруту откроем окно ODE Analyzer Assistant: Maple/Tools/Assistants/ODE Analyzer...

Вводим уравнение: $\text{diff}(y(t), t) = y(t) * (1 - y(t))$; вводим начальное условие: $y(0) = \varepsilon$.

В результате получим точное решение: $y(t) = \frac{\varepsilon}{e^{-t} + \varepsilon - e^{-t}\varepsilon}$.

Вводя конкретные значения для малого параметра построим график выше полученного точного решения:

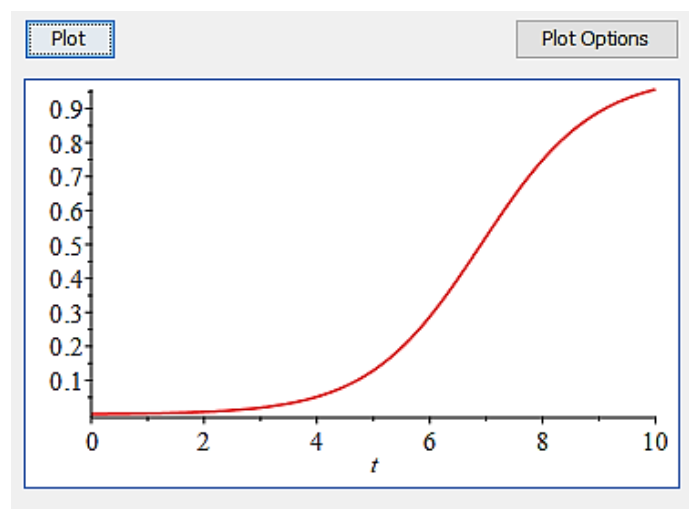


График точного решения при $\varepsilon=0,001$

В графике можно заметить скачок, т. е. резкое изменение решения задачи Коши [1–9]. Для определения точки скачка решения запишем точное решение в виде:

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{e^{-t} + \varepsilon - e^{-t}\varepsilon} = \frac{\varepsilon e^t}{1 + \varepsilon(e^t - 1)}.$$

Если $0 \leq \varepsilon(e^t - 1) = q < 1$ или $0 \leq t < \ln(1 + \varepsilon^{-1})$, то для решения задачи Коши (1)–(2) получим следующее разложение:

$$y(t) = \frac{\varepsilon e^t}{1+q} = \varepsilon e^t(1 - q + q^2 - q^3 + \dots + (-q)^n + \dots)$$

Точнее

$$y(t) = \frac{\varepsilon e^t}{1 + \varepsilon(e^t - 1)} = \varepsilon e^t(1 - \varepsilon(e^t - 1) + \varepsilon^2(e^t - 1)^2 - \dots + (-\varepsilon)^n(e^t - 1)^n + \dots).$$

А если $\ln(1 + \varepsilon^{-1}) < t$, то решение $y(t)$ можно записать в виде:

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{e^{-t} + \varepsilon - e^{-t}\varepsilon} = \frac{\varepsilon e^t}{1 + \varepsilon e^t - \varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}}.$$

$$\ln(1 + \varepsilon^{-1}) < t \Rightarrow 1 + \varepsilon^{-1} < e^t \Rightarrow 1 + \varepsilon < \varepsilon e^t \Rightarrow \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon e^t} < 1.$$

Отсюда следует следующее неравенство:

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t} < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon e^t} < 1 \Rightarrow \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t} < 1.$$

Окончательно, при $\ln(1 + \varepsilon^{-1}) < t$ имеем:

$$y(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}} = 1 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}\right)^n + \dots$$

Таким образом нами доказана следующая теорема. *Теорема.* Решение задачи Коши (1)–(2) в точке $t = \ln\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ имеет скачок и для этого решения справедливо асимптотическое разложение:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), 0 \leq t < \ln(1 + \varepsilon^{-1}), \\ y_2(t), \ln(1 + \varepsilon^{-1}) < t, \end{cases}$$

где

$$y_1(t) = \varepsilon e^t(1 - \varepsilon(e^t - 1) + \varepsilon^2(e^t - 1)^2 - \dots + (-\varepsilon)^n(e^t - 1)^n + \dots),$$
$$y_2(t) = 1 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon e^t}\right)^n + \dots$$

На основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение задачи Коши (1)–(2) непрерывно при $0 < t$. Поэтому решение $y(t)$ непрерывно изменяется на всем рассматриваемом промежутке, в точке резкого изменения (скачка) $t = \ln\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ значение решения равно $y = \frac{1+\varepsilon}{2}$.

Следствие. Справедливы предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_1(t) = 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_2(t) = 1.$$

Список литературы:

1. Reiss E. L. A new asymptotic method for jump phenomena // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. V. 39. №3. P. 440-455. <https://doi.org/10.1137/0139037>
2. Kassoy D. R. A note on asymptotic methods for jump phenomena // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1982. V. 42. №4. P. 926-932. <https://doi.org/10.1137/0142065>
3. Алымкулов К., Кожобеков К. Г. Об асимптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка // *Вестник Жалал-Абадского государственного университета*. 2019. №2. С. 3-7. EDN SEIBKH.
4. Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. М.: Изд-во МГУ, 2007.
5. Турсунов Д. А., Кожобеков К. Г. Асимптотическое решение задачи Неймана с нерегулярной особой точкой // *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*. 2021. Т. 201. №0. С. 98-102. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-201-98-102>
6. Турсунов Д. А., Кожобеков К. Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. 2017. Т. 21. С. 108-121. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.108>
7. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Внешнее решение задачи Э. Л. Рейсса // *Вестник Ошского государственного университета*. 2020. № 1-1. С. 133-140. EDN: KFOESA.
8. Kozhobekov K. G., Erkebaev U. Z., Tursunov D. A. Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. V. 41. P. 96-101. <https://doi.org/10.1134/S1995080220010138>
9. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З., Сулайманов З. М., Абасова Г. З. Асимптотика решения сингулярной задачи с внутренним слоем // *Вестник Ошского государственного университета*. 2021. Т. 1. №1. С. 128-136. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_128

References:

1. Reiss, E. L. (1980). A new asymptotic method for jump phenomena. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39(3), 440-455. <https://doi.org/10.1137/0139037>
2. Kassoy, D. R. (1982). A note on asymptotic methods for jump phenomena. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42(4), 926-932. <https://doi.org/10.1137/0142065>
3. Alymkulov, K., & Kozhobekov, K. G. (2019). Ob asimptotike resheniya zadachi Reissa dlya yavleniya pryzhka. *Vestnik Zhalal-Abadskogo gosudarstvennogo universiteta*, (2), 3-7. EDN SEIBKH. (in Russian).
4. Vasilieva, A. B., & Nefedov, N. N. (2007). Comparison theorems. Chaplygin's method of differential inequalities. Moscow. (in Russian).
5. Tursunov, D. A., & Kozhobekov, K. G. (2021). Asimptoticheskoe reshenie zadachi

Neimana s neregulyarnoi osoboi tochkoj. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory"*, 201(0), 98-102. (in Russian). <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-201-98-102>

6. Tursunov, D. A., & Kozhobekov, K. G. (2017). Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii s drobnou tochkoj povorota. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, 21, 108-121. (in Russian). <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.108>

7. Kozhobekov, K. G., & Tursunov, D. A. (2020). Vneshnee reshenie zadachi E. L. Reissa. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (1-1), 133-140. EDN: KFOESA. (in Russian).

8. Kozhobekov, K. G., Erkebaev, U. Z., & Tursunov, D. A. (2020). Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41, 96-101. <https://doi.org/10.1134/S1995080220010138>

9. Tursunov, D. A., Erkebaev, U. Z., Sulaimanov, Z. M., & Abasova, G. Z. (2021). Asimptotika resheniya singulyarnoi zadachi s vnutrennim sloem. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1(1), 128-136. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_128

Работа поступила
в редакцию 16.08.2023 г.

Принята к публикации
24.08.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Эркебаев У. З., Сулайманов З. М. Нелинейная сингулярно возмущенная задача Коши с внутренним слоем // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №9. С. 8-12. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/94/01>

Cite as (APA):

Erkebaev, U., & Sulaimanov, Z. (2023). Nonlinear Singularly Perturbed Cauchy Problem With Inner Layer. *Bulletin of Science and Practice*, 9(9), 8-12. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/94/01>