ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/93/01

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА С СИНГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЦАМИ

©Эркебаев У. З., *ORCID: 0009-0000-5893-4699, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, uerkebaev@oshsu.kg*

A SINGULARLY PERTURBED DIRICHLET PROBLEM FOR A RING WITH SINGULAR BOUNDARIES

©Erkebaev U., *ORCID: 0009-0000-5893-4699, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, uerkebaev@oshsu.kg*

Аннотация. Обобщенным методом пограничных функций и методом малого параметра построены равномерные асимптотические разложения по малому параметру решений бисингулярных задач Дирихле для кольца с любой степенью точности. Исследованные задачи имеют две особенности: уравнения с малым параметром при старших производных и внешние решения одновременно имеют нарастающие особенности на границах области, т. е. предельные уравнения имеют особенности одновременно на обеих границах кольца. Формальные асимптотические разложения обоснованы принципом максимума и методом дифференциальных неравенств. Полученные асимптотические ряды представляют собой ряд Пюизо. Главный член асимптотических разложений решений имеет отрицательную дробную степень по малому параметру.

Abstract. Uniform asymptotic expansions of small-parameter solutions of bisingular Dirichlet problems for a ring with any degree of accuracy are constructed by a generalized method of boundary functions and a small-parameter method. The investigated problems have two features: equations with a small parameter in the first derivatives and external solutions simultaneously have increasing features on the boundaries of the domain, i. e. limit equations have singularities at the same time on both boundaries of the ring. Formal asymptotic expansions are based on the maxima principle and the method of differential inequalities. The resulting asymptotic series are represented by the Puiseux series. The main term of the asymptotic expansions of the solutions has a negative fractional power with respect to the small parameter.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, задача Дирихле, функции Эйри, модифицированные функции Бесселя, погранфункция.

Keywords: asymptotic expansion, Dirichlet problem, Airy functions, modified Bessel functions, boundary functions.

Исследуем задачу Дирихле [1–7]

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(2-\rho)(\rho-1)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u(1,\varphi,\varepsilon)=0,\ u(2,\varphi,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

Т. 9. №8. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/93

где $f(1,\varphi,0)\neq 0$, $f(2,\varphi,0)\neq 0$.

Подобные задачи исследованы в работах [1–7]. Здесь исследуется особый случай. Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+W(\tau,\varphi,\mu)+Q(\eta,\varphi,\mu), \tag{3}$$

где $V(\rho,\phi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\phi)$, $W(\tau,\phi,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\phi)$, $Q(\eta,\phi,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k q_k(\eta,\phi)$, $\tau=(2-\rho)/\mu$, $\eta=(\rho-1)/\mu$, $\varepsilon=\mu^3$. Из граничных условий (2) имеем

$$W(0,\varphi,\mu)=-V(2,\varphi,\mu^3),\ Q(0,\varphi,\mu)=-V(1,\varphi,\mu^3). \tag{4}$$

Подставляя соотношение (3) в уравнение (1), получим

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)-(2-\rho)(\rho-1)V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{5}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}-\frac{\mu}{2-\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(2-\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{2\partial\varphi^2}-\tau(1-\tau\mu)W\right)= \\ =\square_1(2-\tau\mu,\varphi,\mu^3),(\tau,\varphi)\in D_\tau, \tag{6}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}+\frac{\mu}{1+\eta\mu}\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{\mu^2}{(1+\eta\mu)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2}-\eta(1-\eta\mu)Q\right)= \\ =\square_2(1+\eta\mu,\varphi,\mu^3),(\eta,\varphi)\in D_\eta, \tag{7}$$

где $W=W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta,\varphi,\mu)$.

Из соотношения (5) определим функции $v_k(\rho,\varphi)$, здесь $h_k(\rho,\varphi)$ выбраны так, чтобы выполнялись условия: $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $\lim_{\tau\to+\infty} w_{k-1}(\tau,\phi)=0$, $\lim_{\eta\to+\infty} q_{k-1}(\eta,\phi)=0$, $k\in\mathbf{N_0}$.

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, $k\in\mathbf{N_0}$, $v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0$, тогда $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $k\in\mathbf{N_0}$, когда

$\square_k(\rho,\phi)=\frac{\rho-a}{c}g_k^b+\frac{b-\rho}{c}g_k^a$, где $g_k^b=g_k(b,\phi)$, $g_k^a=g_k(a,\phi)$.

Теперь перейдем к определению $W(\tau,\phi,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\phi)$, $Q(\eta,\phi,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k q_k(\eta,\phi)$. Соотношения (6) и (7) запишем в виде (далее $w_k=w_k(\tau,\varphi)$, $q_k=q_k(\eta,\varphi)$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial\tau^2}-\mu\frac{\partial w_{k-1}}{\partial\tau}+\mu^2\frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial\phi^2}-\tau(c-\mu\tau)w_{k-1}\right)= \\ =\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{3k}\left(g_k^b-\mu\tau\frac{g_k^b}{c}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_{k,0}(\phi)+\mu\tau A_{k,1}(\phi)\right)\mu^{3k},(\tau,\phi)\in D_\tau, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^k\left(\frac{\partial^2 q_{k-1}}{\partial\eta^2}+\mu\frac{\partial q_{k-1}}{\partial\eta}+\mu^2\frac{\partial^2 q_{k-1}}{\partial\phi^2}-\eta(c-\mu\eta)q_{k-1}\right)= \\ =\sum_{k=0}^{+\infty}\mu^{3k}\left(g_k^a-\mu\eta\frac{g_k^a}{c}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(B_{k,0}(\phi)+\mu\eta B_{k,1}(\phi)\right)\mu^{3k},(\eta,\phi)\in D_\eta, \tag{9}$$

Здесь в соотношениях (8) и (9) мы ввели еще вспомогательные асимптотические ряды $\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^k\left(A_{k,0}(\phi)+A_{k,1}(\phi)(b-\rho)\right)$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^k\left(B_{k,0}(\phi)+B_{k,1}(\phi)(\rho-a)\right)$, где $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$, $j=0,1$.

Эти вспомогательные асимптотические ряды должны овладеть таким свойством, что сумма их тождественно должно равняться к нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \left(A_{k,0}(\phi) + A_{k,1}(\phi)(b-\rho)\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k \left(B_{k,0}(\phi) + B_{k,1}(\phi)(\rho - a)\right) \equiv 0 \Rightarrow \tag{10}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}: \begin{cases} A_{k,0}(\phi) + bA_{k,1}(\phi) + B_{k,0}(\phi) - aB_{k,1}(\phi) = 0, \\ -A_{k,1}(\phi) + B_{k,1}(\phi) = 0. \end{cases}$$

Асимптотические ряды с таким свойством не влияют на внешнее регулярное решение. Эти вспомогательные асимптотические ряды введены для того, чтобы с помощью них получить соотношения $\lim\limits_{\tau\to+\infty} w_{k-1}(\tau,\phi) = 0$, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} q_{k-1}(\eta,\phi) = 0$, $k \in \mathbf{N_0}$.

Из соотношения (8), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим рекуррентную систему уравнений

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \tau^2} - c\tau w_{-1} = g_0^b,\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{11}$$

$$Lw_0 = \frac{\partial w_{-1}}{\partial \tau} - \tau^2 w_{-1} - \frac{\tau}{c} g_0^b,\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{12}$$

$$Lw_1 = \frac{\partial w_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \phi^2} - \tau^2 w_0,\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{13}$$

$$Lw_{3k-1} = \frac{\partial w_{3k-2}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{3k-3}}{\partial \phi^2} - \tau^2 w_{3k-2} + g_k^b + A_{k,0}(\phi),\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{14}$$

$$Lw_{3k} = \frac{\partial w_{3k-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{3k-2}}{\partial \phi^2} - \tau^2 w_{3k-1} - \frac{\tau}{c} g_k^b + A_{k,1}(\phi)\tau,\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{15}$$

$$Lw_{3k+1} = \frac{\partial w_{3k}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{3k-1}}{\partial \phi^2} - \tau^2 w_{3k},\ (\tau,\varphi) \in D_\tau, \tag{16}$$

Из первого соотношения (4) следует, что решения уравнений (11)-(16) должны удовлетворять условиям, соответственно:

$$w_{3k-1}(0,\varphi)=0,\ w_{3k}(0,\varphi)=-v_k(b,\varphi),\ w_{3k+1}(0,\varphi)=0. \tag{17}$$

Дополнительно потребуем выполнения условий

$$w_{k-1}(\tau,\varphi) \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty,\ k \in \mathbf{N_0}. \tag{18}$$

Аналогичные задачи получаются из соотношения (8):

$$\tilde{L}q_{-1} \equiv \frac{\partial^2 q_{-1}}{\partial \eta^2} - c\eta q_{-1} = g_0^a,\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{19}$$

$$\tilde{L}q_0 = -\frac{\partial q_{-1}}{\partial \tau} - \eta^2 q_{-1} - \frac{\eta}{c} g_0^a,\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{20}$$

$$\tilde{L}q_1 = -\frac{\partial q_0}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{-1}}{\partial \phi^2} - \eta^2 q_0,\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{21}$$

$$\tilde{L}q_{3k-1} = -\frac{\partial q_{3k-2}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{3k-3}}{\partial \phi^2} - \eta^2 q_{3k-2} + g_k^a + B_{k,0}(\phi),\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{22}$$

$$\tilde{L}q_{3k} = -\frac{\partial q_{3k-1}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{3k-2}}{\partial \phi^2} - \eta^2 q_{3k-1} - \frac{\eta}{c} g_k^a + B_{k,1}(\phi)\eta,\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{23}$$

$$\tilde{L}q_{3k+1} = -\frac{\partial q_{3k}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{3k-1}}{\partial \phi^2} - \eta^2 q_{3k},\ (\eta,\varphi) \in D_\eta, \tag{24}$$

Из второго соотношения (4) следует, что решения уравнений (19)-(24) должны удовлетворять следующим условиям, соответственно:

$$q_{3k-1}(0,\varphi)=0,\ q_{3k}(0,\varphi)=-v_k(a,\varphi),\ q_{3k+1}(0,\varphi)=0,\ k\in\mathbf{N_0}. \tag{25}$$

Дополнительно потребуем выполнения условий

$$q_{k-1}(\eta,\varphi)\to 0 \text{ при } \eta\to+\infty,\ k\in\mathbf{N_0}. \tag{26}$$

При n=1 следует существование, единственность и бесконечно дифференцируемость решений уравнений (11)-(16) и (19)-(24) удовлетворяющих соответственно условиям (17) и (25) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ и η соответственно.

Теперь перейдем к доказательству существования функций $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$ j=0,1 при которых решения уравнений (14)-(19) и (22)-(27) удовлетворяющих соответственно условиям (17) и (25) принадлежать классу функций убывающих степенным ростом по τ и η, соответственно.

Существуют такие функции $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$ j=0,1, $k\in$N удовлетворяющие равенствам (10) и при этом справедливы соотношения:

$$w_{3k+s}(\tau,\phi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3k+s,3j-s}(\phi)}{\tau^{3j-s}},\ s=0,1,2,\ k=-1,0,1,\ldots,\ \tau\to+\infty, \tag{27}$$

$$q_{3k+s}(\eta,\phi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{3k+s,3j-s}(\phi)}{\eta^{3j-s}},\ s=0,1,2,\ k=-1,0,1,\ldots,\ \eta\to+\infty, \tag{28}$$

где $w_{k,j}$, $q_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$.

Как отметили выше, смысл равенств (10) состоит в том, что при таких функциях, которые являются решениями (10) не могут влиять на регулярное внешнее решение $V(\rho,\varphi,\varepsilon)$, так как $\forall k\in$N: $A_{k,0}(\varphi)+A_{k,1}(\varphi)(b-\rho)+B_{k,0}(\varphi)+B_{k,1}(\varphi)(\rho-a)\equiv 0$.

Применяя лемму 2 при n=1 к уравнениям (11)-(13) и (19)-(21), получаем

$$w_{-1}(\tau,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{-1,3j+1}(\phi)}{\tau^{3j+1}},\ w_0(\tau,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{0,3j+3}(\phi)}{\tau^{3j+3}},\ w_1(\tau,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{1,3j+2}(\phi)}{\tau^{3j+2}},$$

$$q_{-1}(\eta,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{-1,3j+1}(\phi)}{\eta^{3j+1}},\ q_0(\eta,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{0,3j+3}(\phi)}{\eta^{3j+3}},\ q_1(\eta,\phi)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{1,3j+2}(\phi)}{\eta^{3j+2}},\ \tau\to+\infty,\ \eta\to+\infty,$$

где $w_{k,j}$, $q_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$.

Допустим, что $\forall k\in\mathbf{N}$ справедливы соотношения (27), (28). Тогда, при k=s+1, имеем

$$Lw_{3s+2}=\frac{\partial w_{3s+1}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial\phi^2}-\tau^2 w_{3s+1}+g_{s+1}^b+A_{s+1,0}(\phi),$$

$$Lw_{3s+3}=\frac{\partial w_{3s+2}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{3s+1}}{\partial\phi^2}-\tau^2 w_{3s+2}-\frac{\tau}{c}g_{s+1}^b+A_{s+1,1}(\phi)\tau,$$

$$Lw_{3s+4}=\frac{\partial w_{3s+3}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{3s+2}}{\partial\phi^2}-\tau^2 w_{3s+3},$$

$$\tilde{L}q_{3s+2}=-\frac{\partial q_{3s+1}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 q_{3s}}{\partial\phi^2}-\eta^2 q_{3s+1}+g_{s+1}^a+B_{s+1,0}(\phi),$$

$$\tilde{L}q_{3s+3}=-\frac{\partial q_{3s+2}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 q_{3s+1}}{\partial\phi^2}-\eta^2 q_{3s+2}-\frac{\eta}{c}g_{s+1}^a+B_{s+1,1}(\phi)\eta,$$

$$\tilde{L}q_{3s+4}=-\frac{\partial q_{3s+3}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 q_{3s+2}}{\partial\phi^2}-\eta^2 q_{3s+3}.$$

Отсюда имеем

$$w_{3s+2}=\frac{w_{3s+1,2}(\phi)-g_{s+1}^b(\phi)-A_{s+1,0}(\phi)}{c\tau}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3s+2,3j+1}}{\tau^{3j+1}},$$

$w_{3s+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3s+3,3j+3}}{\tau^{3j+3}}$ если $A_{s+1,0}(\varphi)=w_{3s+1,2}(\varphi)-c\,A_{s+1,1}(\varphi)$, а также

$$w_{3s+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w_{3s+4,3j+2}}{\tau^{3j+2}},\ \tau\to+\infty.$$

Аналогично,

$$q_{3s+2}=\frac{q_{3s+1,2}(\phi)-g^{a}_{s+1}(\phi)-B_{s+1,0}(\phi)}{c\eta}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_{3s+2,3j+1}}{\eta^{3j+1}},$$

$q_{3s+3}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{3s+3,3j+3}}{\eta^{3j+3}}$, если $B_{s+1,0}(\varphi)=q_{3s+1,2}(\varphi)-cB_{s+1,1}(\varphi)$, при этом

$$q_{3s+4}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{3s+4,3j+2}}{\eta^{3j+2}},\ \eta\to+\infty.$$

В результате получаем систему уравнений с двумя неизвестными $A_{s+1,0}(\varphi)$, $B_{s+1,0}(\varphi)$:

$w_{3s+1,2}(\varphi)-c\,A_{s+1,1}(\varphi)+bA_{s+1,1}(\varphi)+q_{3s+1,2}(\varphi)-cB_{s+1,1}(\varphi)-aB_{s+1,1}(\varphi)=0$,

$-A_{s+1,1}(\varphi)+B_{s+1,1}(\varphi)=0$.

Система имеет единственное решение:

$A_{s+1,1}(\varphi)=B_{s+1,1}(\varphi)=\frac{w_{3s+1,2}(\phi)+q_{3s+1,2}(\phi)}{c}$, $A_{s+1,0}(\varphi)=-q_{3s+1,2}(\varphi)$, $B_{s+1,0}(\varphi)=-w_{3s+1,2}(\varphi)$.

Следовательно, при $A_{s+1,1}(\varphi)=B_{s+1,1}(\varphi)=\frac{w_{3s+1,2}(\phi)+q_{3s+1,2}(\phi)}{c}$, $A_{s+1,0}(\varphi)=-q_{3s+1,2}(\varphi)$, $B_{s+1,0}(\varphi)=-w_{3s+1,2}(\varphi)$ для $\forall k\in N$ справедливы соотношения (27), (28), т.е. имеют место соотношения (18), (26). Лемма доказана.

Список литературы:

1. Tursunov D. A., Erkebaev U. Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities // Ufa Math. J. 2016. V. 8. P. 97-107. http://dx.doi.org/10.13108/2016-8-1-97

2. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. №1 (39). С. 42.

3. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8. №2. С. 52-61. https://doi.org/10.14529/mmph160207

4. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. №1. С. 102-112.

5. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. №1 (39). С. 42-52.

6. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач // Вестник ОшГУ. 2015. №4 (4). С. 20.

7. Турсунов Д. А., Эркебаев У. З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вестник Удмуртского университета. 2015. Т. 25. №4. С. 517–525.

References:

1. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2016). Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities. *Ufa Math. J.*, *8*, 97-107. http://dx.doi.org/10.13108/2016-8-1-97

2. Tursunov, D. A. (2016). Erkebaev UZ Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (1 (39)), 42. (in Russian).

3. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2016). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennoi zadachi Dirikhle v kol'tse s kvadratichnym rostom na granitse. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika, 8*(2), 52-61. (in Russian). https://doi.org/10.14529/mmph160207

4. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2016). Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya s osobennostyami. *Ufimskii matematicheskii zhurnal, 8*(1), 102-112. (in Russian).

5. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2016). Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi Dirikhle dlya kol'tsa s osobennost'yu na granitse. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (1 (39)), 42-52. (in Russian).

6. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2015). Obosnovanie formal'nykh asimptoticheskikh razlozhenii resheniya bisingulyarno vozmushchennykh zadach. *Vestnik OshGU,* (4 (4)), 20. (in Russian).

7. Tursunov, D. A., & Erkebaev, U. Z. (2015). Asimptotika resheniya zadachi Dirikhle dlya bisingulyarno vozmushchennogo uravneniya v kol'tse. *Vestnik Udmurtskogo universiteta, 25*(4), 517–525. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 12.07.2023 г.

Принята к публикации 24.07.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Эркебаев У. З. Сингулярно возмущенная задача Дирихле для кольца с сингулярными границами // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №8. С. 10-15. https://doi.org/10.33619/2414-2948/93/01

Cite as (APA):

Erkebaev, U. (2023). A Singularly Perturbed Dirichlet Problem for a Ring With Singular Boundaries. *Bulletin of Science and Practice, 9*(8), 10-15. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/93/01