УДК 004.94:658.112 https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/02

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ПЕРЕРАБОТКИ ПРОДУКЦИИ

©Султанкул кызы А., *ORCID: 0009-0006-0702-1287, канд. физ.-мат. наук, Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан, aikas06@mail.ru*
©Кулушова У. К., *Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан*
©Эсеналиева Ч. С., *Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан*

SOLUTION OF THE PROBLEM OF LOCATION OF PRODUCTION AND PROCESSING OF PRODUCTS

©Sultankul kyzy A., *ORCID: 0009-0006-0702-1287, Ph.D., Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, aikas06@mail.ru*
©Kulushova U., *Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan*
©Esenalieva Ch., *Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan*

Аннотация. Сформулирована задача размещения с верхними ограничениями на объем производства и переработки продукции. Приведен способ решения задачи, когда функции, определяющие производственные затраты и затраты на переработку линейны. Для иллюстрации способа решения приведен и решен числовой пример.

Abstract. The problem of placement with upper restrictions on the volume of production and processing of products is formulated. A method for solving the problem is given when the functions that determine production costs and processing costs are linear. To illustrate the solution method, a numerical example is given and solved.

Ключевые слова: моделирование процесса, экономико-математические методы и модели, предприятие, размещение производства.

Keywords: process modeling, economic and mathematical methods and models, enterprise, production location.

Постановка задачи и математическая модель. Пусть имеется m пунктов производства однородной продукции A_i , с ограничением на объем производства $x_i \le a_i, i = 1,2,..., m.$ Произведенная в этих пунктов продукция доставляется на n предприятий $B_j, j = 1,2,...n$, произведенной компании, где часть продукции в объеме $b_j \ge 0$ не перерабатывается предприятием оставляется для своей нужды, а часть продукции в объеме $y_{j0} \ge 0$ перерабатывается.

Объем перерабатываемой продукции $y_{j0}, j = 1,2,..., n$ на каждом предприятии B_j ограничен ее максимальной возможностью по переработке Q_j , т.е. $0 \le y_{j0} \le Q_j, j = 1,2,..., n.$. Предполагается также известным величина b_0 — объем перерабатываемой продукции всеми предприятиями.

Для каждого пункта производства $A_i, i=1,2,...,m$ известна функция $\varphi_i(x_i)$ определяющая зависимость стоимости производимой продукции от объема производства x_i, а для каждого предприятия $B_j, j=1,2,...,n$ задана функция $\psi_j(y_{j0})$, которая определяет затраты на переработку продукции $y_{j0}, j=1,2,...,n.$.Известна также матрица транспортных расходов $\left|c_{ij}\right|_{m,n}$. Требуется определить объемы производства $x_i \geq 0, i=1,2,...,m,$ переработки $y_{j0}, j=1,2,...,n,$ и перевозки $x_{ij} \geq 0, i=1,2,...m, j=1,2,...n$ минимизирующие суммарные затраты, т.е. требуется найти минимум.

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(y_{j0}) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=x_i \leq a_i, i=1,2...m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j+y_{j0}, j=1,2,...,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{j0}=b_0, \tag{4}$$

$$0 \leq y_{j0} \leq Q_j, j=1,2,...,n \tag{5}$$

$$x_i \geq 0, x_{ij} \geq 0, i=1,2,...m, j=1,2,...,n, \tag{6}$$

где $x=\left|x_{ij}\right|_{m,n}$, $y=\left|y_{j0}\right|_{n,1}$

Предполагается , что выполняется условия $\sum_{j=1}^{n}b_j+b_0 \leq \sum_{i=1}^{m}a_i$,

$$b_0 \leq \sum_{j=1}^{n}Q_j. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу (1)-(6) в случае ,когда функции $\varphi_i(x_i)$ и $\psi_j(y_{j0})$— линейные, т.е. $\varphi_i(x_i)=c_ix_i$, $x_i \in [0,a_i], i=1,2,...,m,$ $\psi_j(y_{j0})=c_{j0}y_{j0}$, $y_{j0} \in [0,Q_j], j=1,2,...,n.$ Исключим из целевой функции (1) и ограничений (2) переменные $x_i, i=1,2,...,m.$,. После этого задачу (1)-(6) запишем в виде:

найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+c_i)x_{ij}+c_{j0}y_{j0} \tag{8}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \leq a_i, i=1,2,...,m, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j + y_{j0} \le Q_j + b_j,\ j = 1,2,...,n, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} = b_0, \qquad (11)$$

$$x_{ij} \ge 0,\ j = 1,2,...,n, i = 1,2,...,n, \qquad (12)$$

$$y_{j0} \ge 0,\ j = 1,2,...,n \qquad (13)$$

Для решения экстремальной задачи (8)-(13) используем метод, изложенного в работе [1, 2]. Преобразуем задачу (8-13). Введем дополнительные переменные $x_{in+1} \ge 0, i = 1,2,...,m,$ и $x_{m+1j} \ge 0,\ j = 1,2,...,n,$ обращаем неравенство(9), (10) в равенства. Определяем $\sum_{i=1}^{m} x_{in+1}$ и $\sum_{j=1}^{n} x_{m+1j}$. Они соответственно принимают значения:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - (\sum_{j=1}^{n} b_j + b_0), \qquad (*)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{Q}_j - (\sum_{j=1}^{n} b_j + b_0),$$

где $\overline{Q}_j = Q_j + b_j,\ j = 1,2,..,n$.

После этого задачу можно представить в виде транспортной Таблицы 1, где коэффициенты при переменных $x_{in+1} \ge 0, i = 1,2,..,m$ и $x_{m+1j} \ge 0,\ j = 1,2,..n,$ соответственно полагаются равны нулю ,т.е. $\bar{c}_{in+1} = 0, i = 1,2,...,m,\ \bar{c}_{m+1j} = 0,\ j = 1,2,..,n,$

Таблица 1

	$\overline{Q}_1$	$\overline{Q}_2$	..	$\overline{Q}_n$	b_0	$\sum_{i=1}^{m} a_i - (\sum_{j=1}^{n} b_j + b_0)$
a_1	$\bar{c}_{11}$	$\bar{c}_{12}$	..	$\bar{c}_{1n}$	M	$0 \ldots\ x_{1n+1}$
a_2	$\bar{c}_{21}$	$\bar{c}_{22}$	..	$\bar{c}_{2n}$	M	$0 \ldots\ x_{2n+1}$
……	….	…	..	…..	….	…..
a_m	$\bar{c}_{m1}$	$\bar{c}_{m2}$	..	$\bar{c}_{mn}$	M	$0 \ldots\ x_{mn+1}$
$\overline{Q}_1 - b_1$	$0 \ldots\ x_{m+11}$	M	..	M	$c_{10} \ldots\ y_{10}$	M
$\overline{Q}_2 - b_2$	M	$0 \ldots x_{2n+1}$	..	M	$c_{20} \ldots\ y_{20}$	M
…..	…..	…..	..	……	….	………
$\overline{Q}_n - b_n$	M	M	..	$0 \ldots\ x_{2n+1}$	$c_{n0}\ \ldots y_{10}$	M

где M — достаточно большое положительное число(запрещающий тариф).

Пример. Для демонстрации способа решения задачи приведем небольшой пример тремя пунктами производства ($m = 3$) и четырьмя пунктами переработки ($n = 4$).

Имеется: три пункта производства однородной продукции $A_i, i = 1,2,3$ с максимальным объемом производства продукции $0 \le x_i \le a_i, i = 1,2,3,$ т.е $0 \le x_i \le 150, 0 \le x_2 \le 150, 0 \le x_3 \le 100$.

Продукция, произведенная в этих пунктах доставляется на четыре предприятия

$B_j,\ j=1,2,3,4$ произведенной компании, где часть продукции в объеме $\bar{b}=\{50,60,40,40\}$ без переработки оставляет для своей нужды, а часть продукции в объеме $y_{j0}\geq 0,\ j=1,2,3,4$ перерабатывается предприятием $B_j,\ j=1,2,..,n$. Объем перерабатываемой продукции $y_{j0}\geq 0,\ j=1,2,3,4$ на каждом предприятии B_j ограничен ее максимальной возможностью по переработке, т.е. $0\leq y_{10}\leq 50, 0\leq y_{20}\leq 90, 0\leq y_{30}\leq 60, 0\leq y_{40}\leq 80$.

Предполагается, что известно объем перерабатываемой продукции всеми предприятиями этой компании за планируемый период времени, т.е. $b_0=170$. Кроме этого, для каждого пункта производства $A_i, i=1,2,3$, и потребления (переработки) $B_j,\ j=1,2,3,4$, известны линейные непрерывные функции $\varphi_i(x_i), i=1,2,3$ и $\psi_j(y_{j0}),\ j=1,2,3,4$, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1)=2x_1,\ x_1\in[0,150],\\
&\varphi_2(x_2)=2x_2,\ x_2\in[0,150],\\
&\varphi_3(x_3)=x_3,\ x_3\in[0,100],\\
&\psi_1(y_{10})=3y_{10},\ y_{10}\in[0,50],\\
&\psi_2(y_{20})=y_{20},\ y_{20}\in[0,90],\\
&\psi_3(y_{30})=3y_{30},\ y_{30}\in[0,60],\\
&\psi_4(y_{40})=2y_{40},\ y_{40}\in[0,80].
\end{aligned}$$

Известна также матрица транспортных расходов

$$c=\left|c_{ij}\right|_{3,4}=\begin{vmatrix}3 & 5 & 3 & 4\\ 4 & 8 & 6 & 3\\ 7 & 4 & 6 & 6\end{vmatrix}$$

Требуется определить план производства продукции $x_i\geq 0, i=1,2,3$, перевозки $x_{ij}\geq 0, i=1,2,3,\ j=1,2,3,4$, переработки $y_{j0}\geq 0,\ j=1,2,3,4,$ доставляющие минимум целевой функции. Экономико-математическая модель задачи записывается в следующем виде:

найти минимум

$$L(x,y)=3x_{11}+5x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+4x_{21}+8x_{22}+6x_{23}+3x_{24}+7x_{31}+4x_{32}+6x_{33}+ \\ +6x_{34}+2x_1+2x_2+x_3+3y_{10}+y_{20}+3y_{30}+2y_{40} \qquad (14)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=x_1\leq 150, \sum_{j=1}^{4}x_{2j}=x_2\leq 150, \sum_{j=1}^{4}x_{3j}=x_3\leq 100, \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{i1}=50+y_{10}, \sum_{i=1}^{3}x_{i2}=60+y_{20}, \sum_{i=1}^{3}x_{i3}=40+y_{30}, \sum_{i=1}^{3}x_{i4}=40+y_{40}, \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{4}y_{j0}=170, \qquad (17)$$

$$0\leq y_{10}\leq 50, 0\leq y_{20}\leq 90, 0\leq y_{30}\leq 60, 0\leq y_{40}\leq 80, \qquad (18)$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,3, \qquad (19)$$
$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3,\ j=1,2,3,4,$$

где $x=\left|x_{ij}\right|_{3,4}, y=\left|y_1, y_2, y_3, y_4\right|$.

Преобразуем задачу (14-19). Исключим переменные $x_i, i=1,2,3,$ из целевой функции (14) и ограничений (15). Определяем значения $\overline{Q}_j, j=1,2,3,4$, по формуле $\overline{Q}_j=Q_j+b_j, j=1,2,3,4$, т.е. $\overline{Q}_1=100, \overline{Q}_2=150, \overline{Q}_3=100, \overline{Q}_4=120$. Тогда задача (14)-(19) принимает следующий вид:

найти минимум

$$L(x,y)=5x_{11}+7x_{12}+5x_{13}+6x_{14}+6x_{21}+10x_{22}+8x_{23}+5x_{24}+8x_{31}+5x_{32}+7x_{33}+7x_{34}+ \qquad (20)$$
$$+3y_{10}+y_{20}+3y_{30}+2y_{40}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 150, \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 150, \sum_{j=1}^{4} x_{3j} \leq 100, \qquad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1}=50+y_{10} \leq 100, \sum_{i=1}^{3} x_{i2}=60+y_{20} \leq 150, \sum_{i=1}^{3} x_{i3}=40+y_{30} \leq 100, \sum_{i=1}^{3} x_{i4}=40+y_{40} \leq 120, \ (22)$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_{j0}=170, \qquad (23)$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3.\ j=1,2,3,4. \qquad (24)$$

Введем дополнительные переменные $x_{in+1}, i=1,2,3$, и $x_{m+1j}, j=1,2,3,4$. Определяем величины $\sum_{i=1}^{3} x_{in+1}$ и $\sum_{j=1}^{4} x_{m+1j}$ согласно формулам $(*)$. Имеем $\sum_{i=1}^{3} x_{in+1}=40, \sum_{j=1}^{4} x_{m+1j}=110$. Решение задачи (20)-(24) будем искать методом потенциалов [3]. Получим оптимальное решение задачи. Заметим в Таблице 2, отличными от нуля переменными оптимального плана является:

$$x^*=\{x_{11}=100, x_{13}=40, x_{24}=120, x_{32}=100\},$$
$$y^*=\{y_{10}=50, y_{20}=40, y_{30}=0, y_{40}=80\}$$
$$x_1^*=140, x_2^*=120, x_3^*=100.$$

Минимальное значение целевой функции задачи $L(x^*, y^*)=2150$ у.е. Из оптимального решения можно сделать вывод, что предприятие B_3 получает продукцию из пункта производства A_1 в объеме $b_3=100$ для своей потребности. Предприятие B_1 получает продукцию в объеме 100 единиц из A_1, часть из них в объеме $b_1=50$ оставляется для своей потребности, а остальные $y_{10}=50$ продукцию перерабатывает. А предприятие B_2 получает продукцию в объеме 100 единиц из A_3, из них оставляет себе 60 единиц для своей потребности, а остальные $y_{20}=40$ единиц продукции перерабатывает. Предприятие B_4 получает из A_2 120 единиц продукции, оставляет для своей нужды 40 единиц, остальные $y_{40}=80$ единиц направляет для переработки.

При этом суммарные затраты на производство продукции ее перевозки и переработки составляет 2150 у.е.

Таблица 2

	$\overline{Q}_1=100$	$\overline{Q}_2=150$	$\overline{Q}_3=100$	$\overline{Q}_4=120$	$b_0=170$	$\sum_{i=1}^{3} a_i - (\sum_{j=1}^{4} b_j + b_0)$
$a_1=150$	5 … 100	7	5 … 40	6	100	0 … 10
$a_2=150$	6	10	8	5 … 120	100	0 … 30
$a_3=100$	8	5 … 100	7	7	100	0
$\overline{Q}_1-b_1=50$	0				3 … 50	100
$\overline{Q}_2-b_2=90$		0 … 50			1 … 40	100
$\overline{Q}_3-b_3=60$			0 … 6		3 … 0	100
$\overline{Q}_4-b_4=80$				0	2 … 80	100

Список литературы:

1. Ланге Э. Г., Жусупбаев А. Комбинаторный метод решения задачи размещения. Фрунзе: Илим,1990. 153 с.
2. Маш В. А. Оптимальное решение предприятий в многоэтапных системах производства и потребления // Методика расчетов оптимальных планов размещения предприятий и отраслей. М., 1962. 111 с.
3. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Транспортная задача и ее обобщения // Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. С. 3-34.

References:

1. Lange, E. G., & Zhusupbaev, A. Zh. (1990). *Kombinatornyi metod resheniya zadachi razmeshcheniya.* Frunze. (in Russian).
2. Mash, V. A. (1962). Optimal'noe reshenie predpriyatii v mnogoetapnykh sistemakh proizvodstva i potrebleniya. In *Metodika raschetov optimal'nykh planov razmeshcheniya predpriyatii i otraslei,* Moscow. (in Russian).
3. Gol'shtein, E. G., & Yudin, D. B. (1969). Transportnaya zadacha i ee obobshcheniya. In *Zadachi lineinogo programmirovaniya transportnogo tipa,* Moscow, 3-34. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 08.06.2023 г.

Принята к публикации 18.06.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Султанкул кызы А., Кулушова У. К., Эсеналиева Ч. С. Решение задачи размещения производства и переработки продукции // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №7. С. 18-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/02

Cite as (APA):

Sultankul kyzy, A., Kulushova, U., & Esenalieva, Ch. (2023). Solution of the Problem of Location of Production and Processing of Products. *Bulletin of Science and Practice, 9*(7), 18-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/02