УДК 512.86 https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/02

ПОРОЖДАЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ В МОНОМИАЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ (ЧАСТЬ 2)

©Сатаров Ж. С., *д-р физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*
©Мамазиаева Э. А., *канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, mamaziaeva67@mail.ru*
©Мамбетов Ж. И., *канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, zhoomart_mambetov@mail.ru*
©Суйунбек кызы А., *канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*

GENERIC AND RELATIONS IN MONOMIAL GROUPS OVER AN ASSOCIATIVE RING (PART II)

©Satarov Zh., *Dr. habil., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*
©Mamaziaeva E., *Ph.D., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, mamaziaeva67@mail.ru*
©Mambetov Zh., *Ph.D., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, zhoomart_mambetov@mail.ru*
©Suiunbek kyzy A., *Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*

Аннотация. Эта работа является продолжением одноименной ее первой части. В первой части с позиции порождающих и определяющих соотношений были исследованы мономиальная группа $Mon_n(R)$, $n \geq 2$ и ее проективный фактор $PMon_n(R)$ над произвольным основным ассоциативным кольцом R с $1 \neq 0$. Здесь же аналогичная задача решается для элементарных мономиальных групп $EMon_n(R)$ и $PMon_n(R)$, также над произвольным ассоциативным кольцом R. Несмотря на кажущуюся (внешнюю) близость, мономиальные и элементарные мономиальные группы оказываются качественно различными объектами. При решении обоих этих вопросов применен комбинаторный метод трансформации. В отличие от мономиальных групп, случай в $EMon_n(R)$, когда n=2, будет нетрадиционным. Он требует специфических и более тонких рассуждений.

Abstract. This work is a continuation of the first part of the same name. In the first part, the monomial group $Mon_n(R)$, $n \geq 2$ and its projective factor $PMon_n(R)$ over an arbitrary basic associative ring R, $1 \neq 0$. Were studied from the position of generators and defining relations. Here, a similar problem is solved for elementary monomial groups $EMon_n(R)$ and $PMon_n(R)$ also over an arbitrary associative ring R. Despite the apparent (external) proximity, monomial and elementary monomial groups turn out to be qualitatively different objects. When solving both of these issues, the combinatorial method of transformation was applied. Unlike monomial groups $EMon_n(R)$, the case in when $n=2$ will be non-traditional. It requires specific and more subtle reasoning.

Ключевые слова: элементарная мономиальная группа, центр группы, коммутатор, коммутант, порождающий алфавит, стандартные формы, определяющие соотношения, трансформация букв, проективный фактор, скалярная матрица, корневая группа.

Keywords: elementary monomial group, group center, commutator, commutator, generating alphabet, standard forms, defining relations, transformation of letters, projective factor, scalar matrix, root group.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в одноименной ее первой части. Поэтому за определениями и обозначениями отсылая читателя в первую часть, и здесь R мы будем считать произвольным ассоциативным кольцом с 1≠0. Принимаем еще следующие обозначения. Через $(R^*)^/ = [R^*, R^*]$, как всегда, обозначается коммутант мультипликативной группы R^*, т. е. подгруппа в R^*, порожденная всеми ее коммутаторами $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy,\ x,y \in R^*$. Введенная $(R^*)^/$ образует в R^* даже ее нормальную подгруппу (см. об этом [1], стр.38). Для аргумента $\varepsilon \in R^*$ и индексов $i,k, 1 \le i < k \le n,$ положим также $d_{ik}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)d_k(\varepsilon^{-1})$. Далее через $EMon_n(R)$ обозначим подгруппу в $Mon_n(R)$, порожденную всеми ее (элементарными) матрицами $d_{ik}(\varepsilon)$ и $((ik)),\ 1 \le i < k \le n,$. Эту группу $EMon_n(R)$ мы и назовем элементарной мономиальной группой степени n над кольцом R.

Целью в этой части работы является описание на языке порождающих и соотношений введенной только что группы $EMon_n(R)$, $n \ge 2$. Пользуясь этим результатом, находим здесь комбинаторное описание также проективного фактора группы $EMon_n(R)$. Хотя и группы $Mon_n(R)$ и $EMon_n(R)$ имеют определенную близость и общность, тем не менее (как мы увидим ниже), они имеют и существенные различия. Далее, поскольку для номеров $i, 1 < i \le n,$ и элементов $\varepsilon, \sigma \in R^*$

$$d_1([\varepsilon,\sigma]) = d_{1i}(\varepsilon^{-1}\sigma^{-1})d_{1i}(\varepsilon)d_{1i}(\sigma), d_i([\varepsilon,\sigma]) = d_{1i}(\varepsilon)d_{1i}(\sigma)d_{1i}(\varepsilon^{-1}\sigma^{-1}),$$

все (одинарные) матрицы $d_k(x), x \in (R^*)^/,\ 1 \le k \le n,$ содержатся в подгруппе $\langle d_{qj}(\varepsilon); \varepsilon \in R^*,\ 1 \le q < j \le n, \rangle$ (т. е. группе, порожденной всеми указанными парными диагональными матрицами). Желая сохранять симметричность в описании, группу $EMon_n(R)$ мы будем представлять в следующей порождающей системе

$$d_{ik}(\varepsilon), \varepsilon \in R^*,\ 1 \le i < k \le n; d_q(\sigma), \sigma \in (R^*)^/,\ 1 \le q \le n; ((ik)), 1 \le i < k \le n. \tag{g}$$

Стандартные формы в $EMon_n(R)$

Метод трансформации, который мы будем применять для этой цели (см. [2] и [3], [4]), использует стандартные (канонические) формы элементов изучаемой группы. В качестве таковых форм в $EMon_n(R)$ мы объявляем всевозможные комбинации алфавита (g) вида

$$d_{in}(\varepsilon_1)...d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1})d_n(\varepsilon)((n-1,*_{n-1}))...((2*_2))((1*_1)), \tag{sf}$$

где $*_k$ означает номер, для которого $k \le *_k \le n.$

Введенные формы описывают элементы изучаемой группы следующим образом.

Теорема 1. Всякий элемент из $EMon_n(R)$ представляется в стандартном виде (sf), причем такая запись единственна.

Доказательство. Единственность. Пусть какой-то элемент W из $EMon_n(R)$ представлен в виде (*sf*). Поскольку здесь отрезок

$w_1 = d_{2n}(\varepsilon_2)...d_{n-1,n}(\varepsilon_{n-1})d_n(\varepsilon)((n-1,*_{n-1}))...((2*_2))$ из (sf)имеет клеточно-диагональный вид $diag(1,*)$, $\langle 1,*_1\rangle$ дает нам позицию ненулевого элемента первой строки матрицы W. Поэтому номер $*_1$ словом W определен однозначно. Рассматривая теперь вместо W его отрезок W_1, мы аналогичным образом приходим к выводу об однозначности $*_2$ и ε_2 и т. д. Описанный процесс на $(n-1)$-м шаге приведет нас к заключению об единственности аргумента ε.

Что касается части существования теоремы, то она является прямым следствием следующей далее теоремы 3 (см. этап I). Поэтому проведение его здесь является излишним.

Набор определяющих соотношений

Напишем в алфавите (g) следующие (проверяемые напрямую) соотношения группы $EMon_n(R)$:

1. $d_{ik}(\varepsilon) = d_{in}(\varepsilon)d_{kn}(\varepsilon^{-1}), \varepsilon \in R^*,\ \mathrm{k} < \mathrm{n};$
2. $d_i(\sigma) = d_n(\sigma)d_k(\sigma)d_{in}(\sigma),\ \sigma \in (\mathrm{R}^*)^/\ \ 1 \le i < n;$
3. $d_{in}(\varepsilon)d_{in}(\sigma) = d_{in}(\varepsilon\sigma)d_n([\varepsilon^{-1}, \sigma^{-1}]),\ \varepsilon, \sigma \in R^*;$
4. $d_{in}(\varepsilon)d_{kn}(\sigma) = d_{kn}(\sigma)d_{in}(\varepsilon)d_n([\varepsilon^{-1}, \sigma^{-1}]),\ \varepsilon, \sigma \in R^*,\ k \ne i;$
5. $d_n(\varepsilon)d_n(\sigma) = d_n(\varepsilon\sigma),\ \varepsilon, \sigma \in (R^*)^/;$
6. $d_n(\varepsilon)d_{in}(\sigma) = d_{in}(\sigma)d_n(\sigma\varepsilon\sigma^{-1}),\ \varepsilon \in (R^*)^/\ \sigma \in R^*;$
7. $((ik))d_{in}(\varepsilon) = d_{kn}(\varepsilon)((ik)), \varepsilon \in R^*,\ k < n;$
8. $((in))d_{in}(\varepsilon) = d_{in}(\varepsilon^{-1})((in)), \varepsilon \in R^*;$
9. $((in))d_{kn}(\varepsilon) = d_{in}(\varepsilon^{-1})d_{kn}(\varepsilon)((in), \varepsilon \in R^*,\ k \ne i;$
10. $((ik))d_{kn}(\varepsilon) = d_{in}(\varepsilon)((ik)), \varepsilon \in R^*;$
11. $((ik))d_{jk}(\varepsilon) = d_{jn}(\varepsilon)((ik)), \varepsilon \in R^*,\ k < n,\ j \ne i, k;$
12. $((ik))d_n(\varepsilon) = d_n(\varepsilon)((ik)), \varepsilon \in (R^*)^/,\ k < n;$
13. $((in))d_n(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)((in)), \varepsilon \in (R^*)^/;$
14. $((ik))((ik)) = ((ii))\ (= e);$
15. $((ik)) = ((ki)),\ k \ne i;$
16. $((ik))((ij)) = ((kj))((ik)),\ k \ne j;$
17. $((ij))((kj)) = ((kj))((ik)),\ i < k < j;$
18. $((ik))((kj)) = ((kj))((ij)),\ i < k < j;$
19. $((ik))((rj)) = ((rj))((rk)),\ i < r,\ k \ne r, j.$

И здесь целью является доказательство полноты системы соотношений 1–19 для группы $EMon_n(R)$. Этот вопрос решаем вновь используя метод трансформации букв [2–4].

Трансформационные преобразования

Этот параграф, как и в первой части, является базовым для наших дальнейших рассуждений. На множестве всех слов алфавита (g) отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$, $1 \le i < n$, и здесь вводятся по правилу $W \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением

W=*XV*, где *X*–какое-то слово, не содержащее транспозиционные буквы вида $((kq)), k<q,$ с индексами $k \le i$. Очевидно, эти отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$ рефлексивны и транзитивны.

Имеет место следующее.

Теорема 2. (о трансформации букв). Пусть $((ik))$ — какая-то транспозиционная матрица, $1\le i<k\le n,$ и x означает либо некоторую букву $((qr))$ с индексами $1\le q<r,$ либо же диагональные матрицы вида $d_{qn}(\varepsilon),\ \varepsilon\in R^*,$ или $d_n(\sigma),\ \sigma\in(R^*)^/.$ Тогда для них применяя соотношения 3–19 можно выполнить преобразование $V=((ik))x \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} ((ij))$, где j–некоторый номер, для которого $1\le j\le n$.

Доказательство состоит из следующего комбинаторного анализа.

I. *x* — диагональная буква.

Если здесь $x=d_{qn}(\varepsilon),$ то применяя соотношения 7–11, мы будем иметь $V=((ik))d_{qn}(\varepsilon)=d_{jn}(\sigma)((ik)) \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} ((ik)),$ где σ, j –некоторые элементы из $\{\varepsilon,\varepsilon^{-1}\}$ и $\{i,k,q\}$ соответственно. Итак, в этом случае требуемое преобразование имеет место. Если же $x=d_k(\sigma),$ то мы используя соотношения 13 и 14, к требуемой форме приходим как $V=((ik))d_k(\sigma)=d_j(\sigma)((ik)) \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} ((ik)),$ здесь j – некоторый элемент из $\{i,n\}$.

II. $x=((qr)), i\le q<r.$

В этом случае приводимость при $V=((ik))((qr)) \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} ((ij))$ при помощи соотношений 14–19 осуществляется как в пункте II из соответствующей теоремы 2 первой части. Эти повторяющиеся детали здесь мы опускаем.

Возьмем теперь в (*g*) диагональный подалфавит

$$d_{in}(\varepsilon),\ \varepsilon\in R^*,\ 1\le i<n;\ d_n(\sigma),\ \sigma\in(R^*)^/. \qquad (d)$$

На множестве всех слов из (*d*) вводим отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longleftarrow}}, 1\le i<n,$ положив $W \overset{i}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны между собой соотношением *W*=*VY*, где слово *Y* не содержит буквы вида $d_{kn}(\varepsilon), x\ne 1,$ с индексами $k\le i.$ Эти отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longleftarrow}}$ также будут рефлексивными и транзитивными.

Для наших дальнейших рассуждений потребуется.

Лемма. Используя соотношения 3–6 всякое слово W алфавита (d) можно записать в виде $w=d_{1n}(\tau_1)...d_{n-1,n}(\tau_{n-1})d_n(\tau).$

Доказательство. Не теряя общности заданное слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{1}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} Y d_{1n}(\varepsilon). \qquad (\overset{1}{\underset{\sim}{\longleftarrow}})$$

Пусть в этой записи *Y*=*Y*₁y, т. е. y–последняя буква слова *Y*. Если здесь y=$d_{1n}(\sigma),$ то используя 3, мы будем иметь $W=Y_1[d_{1n}(\sigma)d_{1n}(\varepsilon)]=Y_1 d_{1n}(\sigma\varepsilon)d_n([\sigma^{-1},\varepsilon^{-1}]) \overset{1}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} Y_1 d_{1n}(\sigma\varepsilon)$.

 Т. 9. №6. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/91

Если же $y = d_{in}(\sigma),\ i > 1,$ то применяя 4, к требуемой записи приходим так $W = Y_1[d_{1n}(\sigma)d_{1n}(\varepsilon)] = Y_1 d_{1n}(\varepsilon)d_{in}(\sigma)d_n([\sigma^{-1},\varepsilon^{-1}]) \overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}} Y_1\, d_{1n}(\varepsilon)$.

В случае же, когда y=$d_n(\sigma)$, мы используя соотношения 6, требуемую запись получаем как $W = Y_1[d_n(\sigma)d_{in}(\varepsilon)] = Y_1 d_{1n}(\varepsilon)d_n(\varepsilon\sigma\varepsilon^{-1}) \overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}} Y_1\, d_{1n}(\varepsilon)$.

Таким образом, все имеющиеся случаи привели нас к некоторой записи вида $W \overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}} Y_1$ $d_{1n}(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 \in R^*$, т. е. мы добились сокращения длины слова Y в ($\overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}}$). Аналогичным образом удаляя из Y_1=$Y_2\, z$ букву z, будем иметь запись $W \overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}} Y_2\, d_{1n}(\varepsilon_2)$ и т. д. Продолжая этот процесс сокращения до тех пор, пока не исчерпается все слово Y, приходим к записи вида W $\overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}} d_{1n}(\tau_1)$.

Последнее по определению отношения $\overset{1}{\underset{\sim}{\leftarrow}}$ означает, что $W = d_{1n}(\tau_1)V_1$, где Y_1–некоторое слово, не содержащее парные диагональные буквы вида $d_{1n}(x),\ x \neq 1$. Аналогичным образом вытягивая из V_1букву $d_{2n}(\tau_2)$, мы приходим к разложению $W = d_{1n}(\tau_1)d_{2n}(\tau_2)V_2$, где$V_2$ не содержит неединичные буквы вида $d_{kn}(x),\ k \leq 2,$ и т.д. Описанный процесс отщепления парных диагональных букв на (n-1)-м шаге приводит нас к $W = d_{1n}(\tau_1)...d_{n-1,n}(\tau_{n-1})V_{n-1}$. В последней записи слово V_{n-1} не содержит буква вида $d_{in}(x),\ x \neq 1,\ i < n,$ т.е. оно состоит сплошь, из одинарных букв $d_n(\sigma)$ алфавита (d). Поэтому оно применением соотношений 5 приводится к виду $d_n(\tau)$ очевидным образом. Лемма доказана.

Задание группы $EMon_n(R)$

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основной результат работы.

Теорема 3. Элементарная мономиальная группа $EMon_n(R)$, $n \geq 2,$ над ассоциативным кольцом R с $1 \neq 0,$ в порождающих (g) задается соотношениями 1–19.

Доказательство мы проводим в два этапа.

Этап I.

Здесь мы покажем, что любое слово W алфавита (g) используя соотношения 1–19 можно преобразовать к его стандартному виду $S(W)$. Не теряя общности заданное слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} ((1i_1))W_1,\ 1 \leq i_1, \tag{1}$$

(здесь часть из W находящаяся до $((1i_1))$ и не содержащая буквы $((1k))$ с номерами k>1, отброшена). Применяя к слову W_1 соотношения 1 и 2, его можно считать составленным только из букв вида $d_{in}(\varepsilon)$ и $d_n(\sigma)$ из (g). Применение к слову $((1i_1))$ W_1 трансформационной теоремы 2 (т. е. соотношений 3–19), приводит заданное слово к виду $W \overset{1}{\underset{\sim}{\rightarrow}} ((1*_1)),\ *_1 \geq 1,$ т. е. к представлению

$$W = X_1((1*_1)),$$

где X_1 (по определению $\overset{1}{\underset{\sim}{\to}}$) не содержит транспозиционные буквы вида $((1*)), *>1$. Аналогичным образом вытягивая из X_1 сомножителей $((2*_2)), *_2 \geq 2$, будем иметь

$$W = X_2((2*_2))((1*_1)),$$

где X_2 не содержит буквы вида $((k*)), *>k, k \leq 2,$ и т.д. Описанный процесс отщепления транспозиционныхбукв на $(n$-1)-м шаге приводит нас к записи

$$W = X_{n-1}((n-1,*_{n-1}))...((1*_1)),$$

где сомножительX_{n-1} (согласно определению $\overset{n-1}{\underset{\sim}{\to}}$) не содержит неединичные транспозиционные матрицы, т. е. состоит только из диагональных букв вида (d). А по доказанной выше лемме (т. е. соотношениями 3–6) слово X_{n-1} теперь уже можно преобразовать к виду, $d_{1n}(\tau_1)...d_{n-1,n}(\tau_{n-1})d_n(\tau).$Таким образом, слово W соотношениями 1–19 действительно приведено к его стандартному виду $S(W) = d_{1n}(\tau_1)...d_{n-1,n}(\tau_{n-1})d_n(\tau)((n-1,*_{n-1}))...((1*_1)).$

Этап II.

Пусть теперь W=e – произвольное соотношение группы $EMon_n(R)$в порождающих (g) (W – слово указанного алфавита, записывающее единицу e). Записывая левую часть (при помощи соотношений 1–19) в стандартном виде, приводим его к виду $S(W)$=e. По теореме 1 запись в виде $S(W)$ единственна, поэтому последнее равенство влечет за собой $\tau_1 = ... = \tau_{n-1} = \tau = 1$ и $*_k = k$ при всех $k = n-1,...,1,$ т. е. равенство $S(W)$=e возможно только при единичных буквах из $S(W)$. А это уже означает выводимость заданного соотношения из соотношений 1–19. Теорема 3 доказана полностью.

Описания проективных факторов

Как и для самих групп G, представляют такой же интерес комбинаторные описания и их факторов G/Hпо некоторым нормальным подгруппам H. Один из таких вопросов составляют описания проективных факторов G/C групп G по их центрам C=cent G. Сказанное здесь в полной мере относится также к линейным группам. Проективные факторы некоторых линейных групп с помощи порождающих и соотношений изучались, например, в работах [5–7].

Целью здесь является комбинаторное описание проективной факторгруппы $PEMon_n(R)$ $= EMon_n(R)/C$, где C=cent $EMon_n(R)$(относительно алфавита (g)). Начнем эту задачу (как и в первой части) с вычисления центра C. При $|R^*| = 1$ $EMon_n(R)$ очевидным образом превращается в симметрическую группу S_n. Проективный же фактор последней группы мы подробно разобрали в первой части работы. Поэтому всюду далее будем считать $|R^*| > 1$.

Прежде чем начать вычисление центра, вводим к рассмотрению одну вспомогательную группу. Пусть $\sqrt[n]{(R^*)^/} = \{x \in R^* : x^n \in (R^*)^/\}$ (т. е. «корень n-й степени из $(R^*)^/$ »). Нетрудно проверить, что пересечение $G_n(R) = centR^* \cap \sqrt[n]{(R^*)^/}$ образует в R^* коммутативную подгруппу. Ее мы назовем n-й корневой группой кольца R.

Приступаем теперь к вычислению центра. Пусть сначала $n \geq 3$ и $a = (a_{ik})$–некоторая недиагональная матрица, содержащаяся в C с недиагональной позицией $a_{ik} \neq 0$ ($i \neq k$). Тогда мы для матрицы $d_{ij}(\varepsilon), \varepsilon \in R^* \setminus \{1\}, j \neq k,$ имели бы $d_{ij}(\varepsilon)a = ad_{ij}(\varepsilon) \to \varepsilon a_{ik} = a_{ik} \to \varepsilon = 1.$ Полученное противоречие (с выбором ε) показывает, что центр C в рассматриваемом случае будет состоять только из диагональных матриц $d = diag(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n).$ Теперь импликации $((1k))d = d((1k)) \to \varepsilon_1 = \varepsilon_k, 1 < k \leq n,$ показывают, что матрица d должна быть еще и скалярной $d = d(\varepsilon) = diag(\varepsilon,...,\varepsilon).$ Далее поскольку $d_{1n}(\sigma)d(\varepsilon) = d(\varepsilon)d_{1n}(\sigma) \to \sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma$ для любого $\sigma \in R^*$, аргумент ε из $d(\varepsilon)$ должен принадлежать центру cent R^*. Мы имеем и импликацию

$$d(\varepsilon) = d_{1n}(\varepsilon)...d_{n-1,n}(\varepsilon)d_n(\varepsilon^n) \in EMon_n(R) \to \varepsilon^n \in (R^*)^/.$$

Она показывает, что аргумент ε обязан попасть еще и в группу $G_n(R)$. Теперь же то, что всякая матрица $d(\varepsilon)$ с аргументом $\varepsilon \in G_n(R)$ принадлежит центру C, очевидно. Таким образом, при $n \geq 3$ мы для центра получили $C = \{d(x) : x \in G_n(R)\}$. Здесь проективный фактор может быть описан следующим образом.

Теорема 4. Проективная элементарная мономиальная группа $PEMon_n(R), n \geq 3,$ над ассоциативным кольцом R с $1 \neq 0$ и $|R^*| > 1,$ в порождающих (g) задается соотношениями 1–19 и еще следующими центрально-скалярными соотношениями $d_{1n}(\varepsilon)...d_{n-1,n}(\varepsilon)d_n(\varepsilon^n) = e,$ где ε пробегает корневую группу $G_n(R)$.

Случай, когда n=2, является патологическим (и здесь $|R^*| > 1$). Пусть на какое-то время $a = (a_{ik})$ означает недиагональную матрицу из центра

C=cent $EMon_2(R)$. Если здесь $|(R^*)^/| > 1,$ то для элемента $x \in (R^*)^/ \setminus \{1\}$ импликации $d_2(x)a = ad_2(x) \to x^{-1}a_{21} = a_{21} \to x = 1$ (т. е. противоречие с выбором x) показывают на отсутствие в центре C недиагональных матриц. Если же $|(R^*)^/| = 1$ (т. е. когда R^* –коммутативна), но в R^* найдется не идемпотентный элемент x, $x^2 \neq 1,$ то здесь мы имеем $d_{12}(x)a = ad_{12}(x) \to xa_{12} = a_{12}x^{-1} \to xa_{12} = x^{-1}a_{12} \to x^2 = 1.$ Полученное противоречие показывает отсутствие недиагональной матрицы в центре Cи в этом случае.

Пусть теперь в разобранных случаях $d = diag(x, y)$ означает какую-то матрицу из C. Импликация $d_{12}(\varepsilon)d = dd_{12}(\varepsilon) \to \varepsilon x = x\varepsilon$ (при любом $\varepsilon \in R^*$) показывает, что и здесь должно быть $x \in centR^*$. Импликация же $((12))d = d((12)) \to x = y$ дает нам, что рассматриваемая матрица должна иметь еще скалярный вид $d = d(x) = diag(x, x), x \in centR^*$. Теперь принадлежность $d(x) = d_{12}(x)d_2(x^2) \in EMon_2(R)$ (как и выше) влечет за собой включение $x^2 \in (R^*)^/$, т. е. $x \in G_2(R)$. И здесь матрица $d(x)$ с аргументом $x \in G_2(R)$ входит в центр C очевидным образом. Таким образом, и здесь мы имеем $C = \{d(x) : x \in G_2(R)\}$.

При n=2 в приведенном выше списке 1–19 все соотношения, за исключением 2,3,5,6,13–15, являются неадекватными (т. е. они не укладываются). Поэтому опуская их из определяющего набора 1–19 и присоединяя к остальным соотношения, полученные приравниванием к (единичной) матрице e всех порождающих центра C слов алфавита

$$d_{12}(\varepsilon), \varepsilon \in R^*; d_q(\sigma), \sigma \in (R^*)', \ 1 \le q \le 2; \quad ((12)), \qquad (g_2)$$

мы здесь сможем сформулировать следующий результат.

Теорема 5. Проективная элементарная мономиальная группа $PEMon_2(R)$ над ассоциативным кольцом R с $1 \neq 0$, которое еще либо некоммутативно, либо же коммутативно, но в R^* существует не идемпотентным элемент, в порождающих (g_2) задается соотношениями 2, 3, 5, 6, 13–15 и еще следующими центрально-скалярными соотношениями $d_{12}(\varepsilon)d_2(\varepsilon^2) = e$, где ε пробегает корневую группу $G_2(R)$.

Как хорошо стало видно, единственным неразобранным в наших рассмотрениях остался случай, когда n=2, основное кольцо R коммутативно и группа R^* состоит только из идемпотентов. Очевидно здесь $d_{12}(\varepsilon) = d(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in R^*$ и $EMon_2(R) = \langle d(\varepsilon), ((12)) \rangle$ как группа, порожденная указанными коммутирующими между собой элементами, сама будет коммутативной. Присоединение же к тривиальным соотношениям 2, 3, 5, 6 и 13–15 порождающих центральных соотношений дает нам здесь следующее описание.

Теорема 6. Проективная элементарная мономиальная группа $PEMon_2(R)$ над ассоциативно-коммутативным кольцом R с $1 \neq 0$, где еще все элементы из R^* идемпотентны, в порождающих $d(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R^*$; ((12)) задается соотношениями $d(\varepsilon) = e$ и $((12)) = e$.

Список литературы:

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 239 с.
2. Сатаров Ж. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 30 с.
3. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. №10. С. 59-67.
4. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. II // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. №11. С. 33-42.
5. Sze-Chien Y. Defining relations of n-dimensional modular groups. 1959.
6. Сатаров Ж. С. Определяющие соотношения классических ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами // Известия высших учебных заведений. Математика. 1994. №10. С. 66-74.
7. Сатаров Ж. Образующие и соотношения некоторых линейных групп над ассоциативными кольцами без единицы. Ош, 2019. 103 с.

References:

1. Kargapolov, M. I., & Merzlyakov, Yu. I. (1977). Osnovy teorii grupp. Moscow. (in Russian).
2. Satarov, Zh. (1998). Obrazuyushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya v lineinykh gruppakh: avtoref. dis. ... d-r fiz.-mat. nauk. Krasnoyarsk. (in Russian).
3. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (10), 59-67. (in Russian).

4. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy. II. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (11), 33-42. (in Russian).

5. Sze-Chien, Y. (1959). Defining relations of n-dimensional modular groups.

6. Satarov, Zh. S. (1994). Opredelyayushchie sootnosheniya klassicheskikh ortogonal'nykh grupp nad kommutativnymi lokal'nymi kol'tsami. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (10), 66-74. (in Russian).

7. Satarov Zh. (2019). Obrazuyushchie i sootnosheniya nekotorykh lineinykh grupp nad assotsiativnymi kol'tsami bez edinitsy. Osh. (in Kyrgyz).

Работа поступила в редакцию 25.04.2023 г.

Принята к публикации 02.05.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Сатаров Ж. С., Мамазиаева Э. А., Мамбетов Ж. И., Суйунбек кызы А. Порождающие и соотношения в мономиальных группах над ассоциативным кольцом (часть 2) // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №6. С. 23-31. https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/02

Cite as (APA):

Satarov, Zh., Mamaziaeva, E., Mambetov, Zh., & Suiunbek kyzy, A. (2023). Generic and Relations in Monomial Groups Over an Associative Ring (Part II). *Bulletin of Science and Practice, 9*(6), 23-31. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/02