Т. 9. №6. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/91

УДК 512.86 https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/01

ПОРОЖДАЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ В МОНОМИАЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ (ЧАСТЬ 1)

*©**Сатаров Ж. С.,** д-р физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*
*©**Мамазиаева Э. А.,** канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, mamaziaeva67@mail.ru*
*©**Мамбетов Ж. И.,** канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, zhoomart_mambetov@mail.ru*
*©**Суйунбек кызы А.,** канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*

GENERIC AND RELATIONS IN MONOMIAL GROUPS OVER AN ASSOCIATIVE RING (PART I)

*©**Satarov Zh.,** Dr. habil., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*
*©**Mamaziaeva E.,** Ph.D., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, mamaziaeva67@mail.ru*
*©**Mambetov Zh.,** Ph.D., Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, zhoomart_mambetov@mail.ru*
*©**Suiunbek kyzy A.,** Osh Technological University named by M.M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*

Аннотация. Вопрос представлении линейных групп (и связанных с ними конструкций) порождающими элементами и определяющими соотношениями всегда представлял большой интерес в общей комбинаторной теории групп. В названном направлении на сегодня имеется большое количество журнальных и книжных материалов. Возникли также методы исследования. Одним из таких методов является (универсальный) комбинаторный метод трансформации букв. Суть названного метода заключается в преобразовании слов выбранного алфавита рассматриваемой группы к их стандартным формам. В работе дается описание через порождающие и определяющие соотношения мономиальной группы $Mon_n(R)$, $n \geq 2$, заданной над произвольным ассоциативных кольцом с $1 \neq 0$. Пользуясь этим результатом находится комбинаторное описание также проективного фактора $PMon_n(R)$ названной группы. При решении этих вопросов использован упомянутый метод трансформации.

Abstract. The question of representing linear groups (and related constructions) by generating elements and defining relations has always been of great interest in general combinatorial group theory. Today, there are a large number of journal and book materials in this direction. Research methods have also emerged. One such method is the (universal) combinatorial method for transforming letters. The essence of this method is to convert the words of the selected alphabet of the group, $Mon_n(R)$, $n \geq 2$, under consideration to their standard forms с $1 \neq 0$. The paper gives a description in terms of generators and defining relations of the monomial group defined over an arbitrary associative ring with. Using this result, we find a combinatorial description of also the projective factor $PMon_n(R)$ of the named group. When solving these issues, the mentioned method of transformation was used.

Ключевые слова: мономиальная группа, симметрическая группа, подстановочная матрица, порождающий алфавит, стандартные формы, набор соотношений, трансформация букв, проективная мономиальная группа, скалярная матрица.

Keywords: monomial group, symmetric group, substitution matrix, generating alphabet, standard forms, set of relations, transformation of letters, projective monomial group, scalar matrix.

Описание линейных групп через порождающие и соотношения является одним из способов их изучения и составляет один из главных вопросов в комбинаторной теории групп. В названном направлении в качестве ярких (и общих) можно отметить результаты [1–6]. Исследования в этом направлении ведутся интенсивно и по сей день. Целью данной работы стало выявление порождающих и определяющих соотношений мономиальной группы $Mon_n(R)$, $n \geq 2$, над произвольным ассоциативным кольцом R. При решении этой задачи применяется метод трансформации, развитый еще в работах [7–9]. Суть названного метода заключается в преобразовании слов выбранного алфавита к их стандартным формам при помощи найденного набора соотношений.

Определения и обозначения

Всюду далее в работе R считается произвольным ассоциативным кольцом с 1≠0. Матрицу a из полного матричного кольца $M_n(R)$ назовем мономиальной, если каждая ее строка и столбец содержат ровно по одному ненулевому элементу. Пусть далее для подстановки α из симметрической группы S_n (α) означает соответствующую ей подстановочную матрицу, т. е. матрицу из $M_n(R)$ с элементами $(\alpha)_{ij} = \delta_{i.\pi(j)}$, где δ_{qk} — символ Кронекера (равный 1 при $q = k$ и 0 при $q \neq k$). Нетрудно проверить, что отображение

$$S_n \to GL_n(R),\ \alpha \to (\alpha), \tag{mon}$$

задает мономорфизм групп (здесь $GL_n(R)$— полная линейная группа степени n над кольцом R). Далее мы через $d_n(x)$ обозначим диагональную матрицу $diag(1,\ldots,1,x,1,\ldots,1)$ из$M_n(R)$, где элемент x находится на k-ом месте ($1 \leq k \leq n$). Легко видеть, что всякую мономиальную матрицу a можно представить, причем единственным образам, в виде:

$$a = d_1(x_1)\ldots d_n(x_n)(\alpha), \tag{a}$$

где $x_i \in R\backslash\{0\}$ и α — некоторая подстановка из S_n. Очевидно также, что такая матрица a обратима тогда и только тогда, когда обратимы все ее аргументы x_i (в R). Совокупность всех обратимых мономиальных матриц из $M_n(R)$ мы обозначим через $Mon_n(R)$.

Покажем, что введенное $Mon_n(R)$ образует подгруппу в $GL_n(R)$. Для этого достаточно показать замкнутость множества $Mon_n(R)$ относительно действий матричного умножения и взятия обратного элемента. Действительно, пусть наряду с (a) из $Mon_n(R)$ взята еще одна матрица $b = d_1(y_1)\ldots d_n(y_n)(\beta)$.

Поскольку для них
$ab = d_1(x_1)\ldots d_n(x_n)[(\alpha)d_1(y_1)\ldots d_n(y_n)](\beta) =$
$d_1(x_1)\ldots d_n(x_n)d_1(y_{\alpha^{-1}(1)})\ldots d_n(y_{\alpha^{-1}(n)})[(\alpha)(\beta)] = d_1(x_1 y_{\alpha^{-1}(1)}\ldots d_n(x_n y_{\alpha^{-1}(n)})(\alpha\beta)$
и

$$a^{-1} = (\alpha)^{-1}d_n^{-1}(x_n)\dots d_1^{-1}(x_1) = (\alpha)^{-1}d_1(x_1^{-1})\dots d_n(x_n^{-1}) = d_1(x_{\alpha(1)}^{-1})\dots d_n(x_{\alpha(n)}^{-1})(\alpha^{-1})$$

(при написании этих равенств использована мономорфность (mon)!), т. е. упомянутые замкнутости имеют место, $Mon_n(R)$ образует группу по умножению. Она называется мономиальной группой степени *n* над кольцом R.

Стандартные формы в $Mon_n(R)$

Здесь мы сначала займемся порождающей системой названной группы. Хорошо известно, что группа S_n порождается своими транспозициями (12), (13),…, (1*n*) [10]. Пользуясь этим фактом и разложением (*a*), мы в качестве порождающей для $Mon_n(R)$ системы можем взять

$$((ik)),\ 1 \le i < k \le n;\ d_q(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^*,\ 1 \le q \le n \tag{1}$$

(*, как всегда, означает взятие мультипликативной группы). Для сохранения общности матрицу ((*ik*)) мы доопределяем до равных индексов, положив ((*ii*))=*e* (*e* — единичная матрица из $GL_n(R)$).

Упомянутый выше метод трансформации использует стандартные формы элементов группы $Mon_n(R)$ (в алфавите (1)). В качестве таковых мы объявляем всевозможные комбинации вида

$$d_1(\varepsilon_1)\dots d_n(\varepsilon_n)((n-1,*_{n-1}))\dots((2,*_2))((1,*_1)), \tag{sf}$$

где $*_k$ означает некоторый номер, для которого $k \le *_k \le n$. Относительно введенных форм имеет место следующая.

Теорема 1. Всякая матрица $a = (a_{ij})$ из $Mon_n(R)$ представляется в стандартном виде (sf), причем такое представление единственно.

Доказательство проводим индукцией по числу *n*. Пусть в заданной матрице $a_{1k} \neq 0\ \ (1 \le k \le n)$. Тогда она представляется в виде

$$a = d_1(a_{1k})diag(1,*)((1k)), \tag{*}$$

где клетка $*$ — есть некоторая матрица из $Mon_n(R)$. Если здесь *n*=2, то $* \in R$ и разложение $(*)$ можно написать еще как $a = d_1(a_{1k})[d_2(*)((22))]((1k)) = d_1(a_{1k})d_2(*)((1k))((22))$,

т. е. представление (*sf*) для *a* имеет место. Единственность полученного разложения здесь усматривается легко.

При же $n > 2$ сомножитель $diag(1,*)$ из $(**)$ (по предположению индукции) представляется, причем единственным образом, в виде $d_2(\varepsilon_2)\cdots d_n(\varepsilon_n)(n-1,*_{n-1}))\cdots((2,*_2))$, где $k \le *_k \le n$ при всех $k = n-1,\dots,2$. Отсюда и из $(*)$ существование разложения в виде (*sf*) для a и его единственность уже следует очевидным образом. Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы тут же следует порождаемость группы $Mon_n(R)$ матрицами (1). В работе мы в качестве порождающего $Mon_n(R)$ алфавита возьмем и систему (1).

Полный набор соотношений

Напишем в алфавите (1) следующие (легко проверяемые) соотношения группы $Mon_n(R)$:

1. $d_i(\varepsilon)d_i(\sigma) = d_i(\varepsilon\sigma)$;
2. $d_i(\varepsilon)d_k(\sigma) = d_k(\sigma)d_i(\varepsilon),\quad k \neq i$;
3. $((ik))d_i(\varepsilon) = d_k(\varepsilon)((ik))$;

4.$((ik))d_k(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)((ik))$;
5.$((ik))d_q(\varepsilon) = d_q(\varepsilon)((ik))$; $q \neq i, k$;
6.$((ik))((ik)) = ((ii))$;
7.$((qk)) = ((kq))$, $q \neq k$;
8.$((ik))((iq)) = ((kq))((ik))$, $k \neq q$;
9.$((ik))((jk)) = ((jk))((ij))$, $i < j < k$;
10.$((ik))((kj)) = ((kj))((ij))$, $i < k < j$;
11.$((ik))((qj)) = ((qj))((ik))$, $i < q$, $k \neq q, j$.

Нашей ближайшей целью является доказательство полноты этой системы соотношений для группы $Mon_n(R)$. Для этой цели мы используем (как уже упомянуто) комбинаторный метод трансформации.

Трансформационные преобразования

Этот параграф также является вспомогательным при доказательстве основного результата работы. Введем сначала на множестве всех слов алфавита (1) (бинарные) отношения $\overset{1}{\rightarrow}$, $1 \leq i < n$, положив $W \overset{1}{\tilde{\rightarrow}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением *W=XV*, где *X* – некоторое слово, не содержащее транспозиционные буквы вида $((kq))$, $k < q$ и $k \leq i$. Введенные отношения очевидным образом являются рефлексивными и транзитивными. Имеет место следующая.

Теорема 2. (о трансформации букв). Пусть $((ik))$ — некоторая транспозиционная матрица,$1 \leq i < k \leq n$, и x — также некоторая неединичная буква алфавита (1), для которой при $x = ((qr))$ $(q < r)$ считается выполненным условие $q \geq i$. Тогда для них применяя соотношения 1–11 можно выполнить преобразование $V = ((ik))x \overset{1}{\tilde{\rightarrow}} ((ij))$, где j — некоторый номер для которого $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Наше доказательство является комбинаторным и различает следующие случаи.

I. $x = d_q(\varepsilon)$.

Здесь, применяя соотношения 3–5, имеем $V = d_j(\varepsilon)((ik)) \overset{1}{\rightarrow} ((ik))$, где j — некоторый номер, из $\{i, k. q\}$, т. е. требуемое преобразование здесь имеет место.

II.$x = ((qr))$ $q < r$.

Рассмотрим следующие подслучаи.

a) *q=i*. Если здесь *r=k*, то используя 6 будем иметь

$V = ((ik))((ik)) = ((ii)) \overset{1}{\rightarrow} ((ii))$, т. е. приходим к требуемому виду. Если же $r \neq k$, то применяя соотношения 8, мы приходим к $V = ((kr))((ik))$, что дальнейшим применением (к первому сомножителю) 7 приводит нас к $V \overset{1}{\rightarrow} ((ik))$.

в) $i < q$, $k = r$ $(\rightarrow q < k)$. Здесь, используя 9 будем иметь $V = ((qr))((iq)) \overset{1}{\rightarrow} ((iq))$, т. е. получаем требуемую форму.

c) *q=k*. В этом случае применяя соотношения 10, приходим к требуемой записи $V = ((ik))((kr)) = ((kr))((ir)) \overset{1}{\rightarrow} ((ir))$.

d) $i < q$, $k \neq q, r$. При помощи соотношений 11, требуемую форму получаем так $V = ((ik))((qr)) = ((qr))((ik)) \overset{1}{\rightarrow} ((ik))$.

Таким образом, во всех имеющихся случаях преобразование, указанное в формулировке теоремы, имеет место. А это уже означает завершение доказательства теоремы 2.

Главный результат

Он сформулируется следующим образом.

Теорема 3. Мономиальная группа $Mon_n(R)$, $n \geq 2$, над ассоциативным кольцом Rс $1 \neq 0$, в порождающих (1) представляется соотношениями 1–11.

Доказательство. Пусть W=e — произвольное соотношение группы $Mon_n(R)$ в алфавите (1) (т. е. W — какое-то слово указанного алфавита, записывающее единичную матрицу e). Доказательство теоремы состоит из двух этапов.

Этап I.

Покажем сперва, что применяя соотношения 1–11, слово W можно преобразовать к его стандартному виду $S(W)$. Не теряя общности это слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{1}{\rightrightarrows} ((1i_1))W_1,\ 1 \leq i_1 \tag{2}$$

(здесь часть из W, находящаяся до $((1i_1))$ и не содержащая буквы вида $((1k))$, $k > 1$, отброшена). Пусть W_1=xW_2, т. е. x — первая ненулевая буква в W_1. Применяя к стыку $((1i_1))$ x трансформационную теорему 2, будем иметь:

$$W \overset{1}{\rightrightarrows} ((1i_2))W_2,\ 1 \leq i_2, \tag{3}$$

где этой операцией мы добились сокращения дополнения W_1 в представлении (2). Теперь аналогичным образом поступая с представлением (3), будем иметь $W \overset{1}{\rightrightarrows} ((1i_3))W_3,\ 1 \leq i_3$, и т. д. Продолжая описанный процесс сокращения до тех пор, пока не исчерпается полностью дополнение W_1, мы приходим к записи $W \overset{1}{\rightrightarrows} ((1 *_1))W_1,\ 1 \leq *_1$.

Последнее согласно определению $\overset{1}{\rightrightarrows}$ означает, что левая часть заданного соотношения представлена в виде W=X_1 $((1 *_1)),\ 1 \leq *_1 (\leq n)$, где слово X_1 уже не содержит транспозиционные буквы вида $((1 *)),\ 1 < * \leq n$.

Аналогичным образом вытягивая из X_1 сомножитель $((2 *_2))$, мы будем иметь W=$X_2((2 *_2))((1 *_1)),\ 1 \leq *_1,\ 2 \leq *_2$, и т. д. Продолжение описанного процесса отщеплений на $(n-1)$-м шаге приводит нас к W=$X_{n-1}\left((n-1, *_{n-1})\right) \cdots \left((2 *_2)\right)\left((1 *_1)\right)$, $\mathrm{k} \leq *_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, где слово X_{n-1} уже не содержит неединичных транспозиционных букв из (1), т. е. оно состоит сплошь из диагональных букв этого алфавита. Применяя сомножителю X_{n-1} соотношения 1 и 2, легко записать его в виде $X_{n-1} = d_1(\varepsilon_1) \ldots d_n(\varepsilon_n)$. Таким образом, используя соотношения 1–11 всякое слово W можно привести к его стандартному виду $S(W) = d_1(\varepsilon_1) \ldots d_n(\varepsilon_n)((n-1, *_{n-1})) \ldots ((2 *_2))(1 *_1))$.

Этап II

Заменив здесь в заданном соотношении W с его стандартной формой, имеем равенство
$d_1(\varepsilon_1) \ldots d_n(\varepsilon_n)((n-1, *_{n-1})) \ldots ((2 *_2))(1 *_1)) = e$.

Согласно теореме 1 последнее возможно только тогда, когда все его буквы — единичные, т. е. $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 1$ и $*_k = k$ при всех k=1,…, n−1. А это уже означает, что соотношение W=e есть следствие от соотношений 1–11. Теорема 3 доказана полностью.

В заключение мы остановимся на частном случае, когда основное кольцо состоит только из двух элементов: R={0, 1}. В этом случае порождающий алфавит (1) будет состоять только из транспозиционных матриц

$$((ik)),\ 1 \le i < k \le n. \tag{$1^/$}$$

Определяющий же группу $Mon_n(R)$ набор 1–11 здесь превращается в соотношения 6–11 (серии 1–5 выбрасываются как тривиальные). Таким образом, в случае кольца R={0, 1} основной результат работы сформулируется как

Теорема 4. Мономиальная группа $Mon_n(R)$, $n \ge 1$,над кольцом R={0, 1} из двух элементов в порождающих ($1^/$) задается соотношениями 6–11.

Отождествив в рассматриваемом случае группу $Mon_n(R)$ с ее прообразом S_n при мономорфизме (mon) и заменив порождающую систему ($1^/$) с алфавитом

$$((ik)),\ 1 \le i < k \le n, \tag{4}$$

мы как прямое следствие из теоремы 4 заполучаем и следующую теорему.

Теорема 5. Симметрическая группа S_n, $n \ge 2$, в образующих (4) задается соотношениями

6.$(ik)(ik) = (ii)$;

7.$(kq) = (qk)$, $k \neq q$;

8.$(ik)(iq) = (kq)(ik)$, $k \neq q$;

9.$(ik)(jk) = (jk)(ij)$, $i < j < k$;

10.$(ik)(kj) = (kj)(ij)$, $i < k < j$;

11.$(ik)(qi)) = ((qj))((ik))$, $i < q$, $k \neq q, j$.

Многие другие комбинаторные описания симметрической группы S_n,$n \ge 2$, еще задолго до этого были известны из книги [11].

Опираясь на теорему 3, здесь мы находим также комбинаторное описание проективной мономиальной группы $PMon_n(R)$, т. е. фактора $Mon_n(R)$ по ее центру $C = centMon_n(R)$. Для этого сначала нам нужно найти какую-нибудь порождающую центра C систему слов v, $v \in V$ алфавита (1). Затем присоединяя к найденным соотношениям 1–11 (центральные) соотношения v=1, $v \in V$, мы, тем самым, приходим к требуемому для $PMon_n(R)$ описанию [12].

При $|R^*| = 1$, как мы уже видели, $Mon_n(R)$ просто-попросту превращается в симметрическую группу S_n. Поскольку последняя при $n \ge 3$ имеет единичный центр (т. е. является группой «без центра»), ее проективный фактор просто совпадает с самой S_n. А комбинаторное же описание S_n нами уже приведено в теореме 5. Если же n=2, то S_2 является циклической группой порядка 2, поэтому для рассматриваемого фактора здесь имеет место представление $PM_2(R^*) = ((12);\ (12)^2 = e,\ (12) = e)$, т. е. он в порождающем (12) задается соотношением (12)=e.

Переходим теперь к случаю $|R^*| > 1$, и вычислим центр C. Допустим, что он содержит в себе какую-то матрицу $a = (a_{ik})$ с недиагональной позицией $a_{ik} \neq 0$ $(i \neq k)$. Для элемента $\varepsilon \in R^* \backslash \{1\}$ сравнение в $d_i(\varepsilon)a = ad_i(\varepsilon)$ позиций $< i, k >$, тогда, приводит нас к неверному равенству $\varepsilon a_{ik} = a_{ik}$. Таким образом, центр C обязан состоять только из диагональных слов $d = d_1(\varepsilon_1)\dots d_n(\varepsilon_n)$. Далее, поскольку $((ik))d = d((ik)) \to \varepsilon_i = \varepsilon_k$ при всех $1 \le i < k \le n$, это слово должно быть скалярным $d(\varepsilon) = d_1(\varepsilon_1)\dots d_n(\varepsilon)$. Импликация же $\forall\, \sigma \in R^*$: $d_i(\sigma)d(\varepsilon) = d(\varepsilon)d_i(\sigma) \to \varepsilon \in centR^*$показывает, что элементы из C должны быть еще и скалярно-центральными $d(\varepsilon) = d_1(\varepsilon_1)\ldots d_n(\varepsilon)$ $\varepsilon \in centR^*$. Таким образом, в этом случае мы имеем следующее описание.

Теорема 6. Проективная мономиальная группа $PMon_n(R)$, n ≥ 2, над ассоциативным R с $|R^*| > 1$ в порождающих (1) задается соотношениями 1–11 и еще центральными соотношениями $d(\varepsilon) = d_1(\varepsilon_1)\ldots d_n(\varepsilon) = e$, $\varepsilon \in centR^*$.

Список литературы:

1. Magnus W. Über n-dimensionale Gittertransformationen // Acta Mathematica. 1935. V. 64. P. 353-367. https://doi.org/10.1007/BF02545673

2. Sze-Chien Y. Defining relations of n-dimensional modular groups. 1959.

3. Swan R. G. Generators and relations for certain special linear groups // Advances in Mathematics. 1971. V. 6. №1. P. 1-77.

4. Романовский Н. С. Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальным кольцом // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12. №4. С. 922-925. https://doi.org/10.1007/BF00967425

5. Носков Г. А. Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами // Математические заметки. 1974. Т. 16. №2. С. 237-246. https://doi.org/10.1007/BF01105578

6. Green S. M. Generators and relations for the special linear group over a division ring // Proceedings of the American Mathematical Society. 1977. V. 62. №2. P. 229-232.

7. Сатаров Ж. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 30 с.

8. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. №10. С. 59-67.

9. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. II // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. №11. С. 33-42.

10. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 239 с.

11. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Д. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.

12. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений. М.: Наука, 1974. 455 с.

References:

1. Magnus, W. (1935). Über n-dimensionale Gittertransformationen. *Acta Mathematica*, *64*, 353-367. https://doi.org/10.1007/BF02545673

2. Sze-Chien, Y. (1959). Defining relations of n-dimensional modular groups.

3. Swan, R. G. (1971). Generators and relations for certain special linear groups. *Advances in Mathematics*, *6*(1), 1-77.

4. Romanovskii, N. S. (1971). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya polnoi lineinoi gruppy nad lokal'nym kol'tsom. *Sibirskii matematicheskii zhurnal, 12*(4), 922-925. (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF00967425

5. Noskov, G. A. (1974). Porozhdayushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya simplekticheskikh grupp nad nekotorymi kol'tsami. *Matematicheskie zametki, 16*(2), 237-246. (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01105578

6. Green, S. M. (1977). Generators and relations for the special linear group over a division ring. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *62*(2), 229-232.

7. Satarov, Zh. (1998). Obrazuyushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya v lineinykh gruppakh: avtoref. dis. ... d-r fiz.-mat. nauk. Krasnoyarsk. (in Russian).

8. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (10), 59-67. (in Russian).

9. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy. II. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (11), 33-41. (in Russian).

10. Kargapolov, M. I., & Merzlyakov, Yu. I. (1977). Osnovy teorii grupp. Moscow. (in Russian).

11. Kokseter, G. S. M., & Mozer, U. O. D. 1980. Porozhdayushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya diskretnykh grupp. Moscow. (in Russian).

12. Magnus, V., Karras, A., & Soliter, D. (1974). Kombinatornaya teoriya grupp: Predstavlenie grupp v terminakh obrazuyushchikh i sootnoshenii. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 25.04.2023 г.

Принята к публикации 02.05.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Сатаров Ж. С., Мамазиаева Э. А., Мамбетов Ж. И., Суйунбек кызы А. Порождающие и соотношения в мономиальных группах над ассоциативным кольцом (часть 1) // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №6. С. 15-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/01

Cite as (APA):

Satarov, Zh., Mamaziaeva, E., Mambetov, Zh., & Suiunbek kyzy, A. (2023). Generic and Relations in Monomial Groups Over an Associative Ring (Part I). *Bulletin of Science and Practice, 9*(6), 15-22. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/91/01