ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.983 https://doi.org/10.33619/2414-2948/89/01

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

©**Чоюбеков С. М.,** *ORCID: 0009-0004-1937-5408, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, choybekov.25.04.70@gmail.com*

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF NONCLASSICAL LINEAR VOLTERRA EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH INITIAL CONDITIONS

©**Choybekov S.,** *ORCID: 0009-0004-1937-5408, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, choybekov.25.04.70@gmail.com*

Аннотация. Модели многих задачи прикладного характера сводятся к интегральным уравнениям, среди которых неклассические уравнения представляют особый интерес и мало изучены. Интегральные уравнения играют важную роль в разделе интегро-дифференциальных уравнений. При помощи них развиваются современные науки и технологии, т. е. широко применяются в разделах математики, используются в физике, в технике, механике, в радиотехнике, в компьютерных технологиях, геофизике, теории управления и т. д. Развиваются новые области, связанные с применением интегральных уравнений, например, экономические науки, некоторые разделы биологии и в управлении т. д. С помощью современных компьютерных технологий появляется возможность реализации разнообразных числовых теорий и моделирование сложных процессов. Таким же образом многие задачи приводятся к интегральным или к интегро-дифференциальным уравнениям. И в таком случае на первый план выдвигается качественное исследование решений задач. Однако, уравнения с двумя переменными пределами интегрирования, которые называют неклассическими, мало изучены. Это объясняется трудностями в построении резольвенты и в составлении соотношения для нее, т. к. еще не получено аналитическое представление в общем виде за исключением некоторых модельных случаев. Поэтому такие исследования решений являются актуальными. В этой работе рассматривается решение и регуляризация линейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Линейное неклассическое интегральное уравнение Вольтерры первого рода решается с использованием производной и определяется регуляризацией. Доказанным фактом сформулирована теорема. Использован соответствующий пример, который полностью раскроет решение и оценку.

Abstract. Models of many problems of an applied nature are reduced to equations by an integral equation, among which non-classical equations are of special interest and little studied. Integral equations play an important role in the section of the integrodifferential equation. With the help of them, modern sciences and technologies are developing, i.e. they are widely used in the branches of mathematics, are used in physics, in mechanical engineering, in radio engineering, in computer technology, geophysics, control theory, etc. New areas related to the application of integral equations are developing, for example, economic sciences, some sections of biology and management, etc. With the help of modern computer technology, it becomes possible to implement a variety of numerical theories and simulate complex processes. In the same way, many problems are brought to integral equations. In this case, a qualitative study of problem solving comes to the fore. However, equations with two variable limits of integration, which are called non-classical, are poorly understood. This is due to difficulties in constructing a resolvent and in compiling a relation for it, because an analytical representation in general has not yet been obtained, with the exception of some model cases. Therefore, such research decisions are relevant. In this paper, the solution and regularization of the nonlinear nonclassical Volterra integral equation of the first kind is considered. The linear nonclassical Volterra integral equation of the first kind is solved using a derivative and is determined by regularization. The theorem is formulated by the proven fact. An appropriate example will be used, which will fully reveal the solution and evaluation.

Ключевые слова: интеграл, уравнение.

Keywords: integral, equation.

Интегральные уравнения первого рода являются основными в разделе интегро-дифференциальных уравнений. Над этой проблемой работали многие математики [1–5].

Рассматривается решение и регуляризация неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Поставлена задача и введена норма решения *u(t).* Решается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Далее оценивается решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода. В итоге доказанным фактом формулируется теорема. Рассмотрим соответствующий пример.

Постановка задачи:

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t)\,;\; t\in[t_0,T] \tag{1}$$

$\alpha(t)$, $K(t,s)$ и $f(t)-$ заданные функции, где $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t)=\beta<t_0$, $f(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t)\le t$ при всех $t\in[t_0,T]$, $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)-$ непрерывные функции в области $G=\{(t,s):\ \alpha(t)\le s\le t\le T\}$, $\alpha(t)-$ возрастающая функция в $[t_0,T]$.

Для $u(t)\in C[t_0,T]$ введем норму $\|u(t)\|_C = \sup\limits_{t\in[t_0,T]}|u(t)|$

Предположим выполнение следующих условий:

a) $K(t,s)$ и $K'_t(t,s)-$ непрерывные функции в области $G=\{(t,s):\ \alpha(t)\le s\le t\le T\}$, $K(t,t)\ge\alpha>0$ при всех $t\in[t_0,T]$;

b) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t)\in C[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=\beta<t_0$, $\alpha(T)=t_0$, при всех $t\in[t_0,T]$, где $\alpha(t)-$ возрастающая функция в $[t_0,T]$. Пусть

$$u(t)=\varphi(t),\ t\in[\beta,t_0] \tag{2}$$

где $\varphi(t)-$ известная непрерывная функция в $[\beta,t_0]$.

Решение:

Пусть $t\in[t_0,T]$. Тогда дифференцируя интегральное уравнение (1), имеем [5–7]:

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)u(s)ds = f'(t)$$

Т. 9. №4. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/89

отсюда получим:

$$u(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)};\ t\in[t_0,T] \tag{3}$$

Учитывая условия a), b) и (2) интегральное уравнение (3) запишем в виде:

$$u(t)=-\int_{t_0}^{t}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+P(t),\ t\in[t_0,T] \tag{4}$$

где

$$P(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}\varphi(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t_0}\frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)};\ t\in[t_0,T] \tag{5}$$

Полагая $t=t_0$ и учитывая (2) и (5) из (1) и (4), получим:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0}K(t_0,s)u(s)ds=f(t_0); \tag{6}$$

$$\varphi(t_0)=\frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}\varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)-\int_{\alpha(t)}^{t_0}\frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}u(s)ds+\frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)} \tag{7}$$

Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon\varphi(t_0) \tag{8}$$

с условием

$$v(t,\varepsilon)=\varphi(t),\ t\in[\beta,t_0] \tag{9}$$

где $\varepsilon>0$ — некоторый малый параметр. В интегральном уравнении (8) сделаем подстановку:

$$v(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),\ t\in[\beta,T] \tag{10}$$

подставив (10) в (8), имеем:

$$\varepsilon u(t)+\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)u(s)ds+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon\varphi(t_0), \tag{11}$$

В силу (1) из (11) получим:

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon[\varphi(t_0)-u(t)] \tag{12}$$

Учитывая (10), условию (9) и (2) имеем:

$$\xi(t,\varepsilon)=0;\ t\in[\beta,t_0]. \tag{13}$$

Из (12) разделив интеграл получим:

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t_0}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds+\int_{t_0}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon[\varphi(t_0)-u(t)]. \tag{14}$$

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t_0}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds+\int_{t_0}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon[\varphi(t_0)-u(t)].$$

В силу (13) имеем:

$$\int_{\alpha(t)}^{t_0}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=0,\ t\in[\beta,T] \tag{15}$$

и отметим, что $\varphi(t_0)=u(t_0)$;

Тогда в силу (15) из (14) получим:

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon[\varphi(t_0)-u(t)] \tag{16}$$

Дифференцируя уравнение (16), имеем:

$$\varepsilon\xi'(t,\varepsilon)+K(t,t)\xi(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K'_t(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon u'(t) \tag{17}$$

с начальным условием

$$\xi(t_0,\varepsilon)=0 \tag{18}$$

Уравнение (17) линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\xi'(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)\xi(t,\varepsilon)=-u'(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K'_t(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds \tag{19}$$

с условием (18). Задача Коши (18)-(19) эквивалентны следующему интегральному уравнению:

$$\xi(t,\varepsilon)=-\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\left(u'(s)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{s}K'_s(s,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau\right)ds \tag{20}$$

Теперь воспользуемся формулой Дирихле [8] и из (20) имеем:

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+F(t,\varepsilon) \tag{21}$$

где

$$H(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K'_s(s,\tau)ds, \tag{22}$$

$$F(t,\varepsilon) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} u'(s)ds\,. \tag{23}$$

Пусть $M_0 = \sup_{(t,s)\in G} |K'_t(t,s)| < \infty$, $u_0 = \|u'(t)\|_C = \sup_{t\in[t_0,T]} |u'(t)| < \infty$

Тогда из (22) и (23) имеем оценку:

$$|H(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} M_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\alpha(t-s)}ds = \frac{M_0}{\alpha\varepsilon}\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}\alpha(t-s)}\Big|_{s=t_0}^{s=t} \le \frac{M_0}{\alpha};\ (t,\tau)\in G \tag{24}$$

$$|F(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t} u_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\alpha(t-s)}ds = u_0\frac{\varepsilon}{\alpha};\ t\in[\beta,T] \tag{25}$$

Далее в силу (24) и (25) из (21) имеем:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t} \frac{M_0}{\alpha}|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \frac{|u_0|\varepsilon}{\alpha};\ t\in[\beta,T] \tag{26}$$

С помощью леммы Гронуолла-Беллмана [9] из (26) получаем:

$|\xi(t,\varepsilon)| \le \frac{u_0\varepsilon}{\alpha}e^{\int_{t_0}^{T}\frac{M_0}{\alpha}ds}$, $t\in[t_0,T]$, т. е.

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \frac{|u_0|}{\alpha}e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)}\varepsilon \tag{27}$$

последний стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|u_0|}{\alpha}e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)}\varepsilon = 0$

Доказанным фактом выше можно сформулировать следующую теорему.

Теорема: пусть выполняются условия а), в) и функция $u(t)\in C^1[t_0,T]$ является решением интегрального уравнения (1) с условием (2). Тогда решения интегрального уравнения (8) с условием (9) сходится решению $u(t)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. справедлива следующая оценка

$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le M_1\varepsilon$

где

$M_1 = \frac{|u_0|}{\alpha}e^{\frac{M_0}{\alpha}(T-t_0)}$,

$M_0 = \sup_{(t,s)\in G}|K'_t(t,s)|$,

$u_0 = \|u'(t)\|_C = \sup_{t\in[t_0,T]}|u'(t)|$,

Пример: рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{t-1}^{t} e^{t-s}u(s)ds = e^t;\ t\in[0;1] \tag{28}$$

с условием

$$u(t) = e^t\ ,\ t \in [-1;0] \tag{29}$$

Здесь $\alpha(t) = t-1$, $t_0 = 0$, $\beta = -1$, $T = 1$, $K(t,s) = e^{t-s}$, $\alpha'(t) = 1$, $f(t) = e^t$. Кроме того предположим, что при $t \in [-1;0]$ $u(t) = e^t$, $\varphi(t) = e^t$. В этом случае $K(t,\alpha(t)) = e$, $K'_t(t,s) = e^{t-s}$, $K(t,t) = 1$ при $(t,s) = G = \{(t,s) : t-1 \le s \le t \le 1\}$

Проверим условию (6) и (7):

$$\int_{-1}^{0} e^{-s} e^{s} ds = \int_{-1}^{0} ds = 1,$$

$$1 = \varphi(0) = P(0) = ee^{-1} - \int_{-1}^{0} e^{-s} e^{s} ds + 1 = 1 - \int_{-1}^{0} ds + 1 = 2 - 1 = 1.$$

Решение интегрального уравнения (28) с условием (29) эквивалентно к следующему интегральному уравнению:

$$u(t) = P(t) - \int_{0}^{t} e^{t-s} u(s) ds\ ,\ t \in [0;1] \tag{30}$$

где

$$P(t) = ee^{t-1} - \int_{t-1}^{0} e^{t-s} e^{s} ds + e^t = e^t - e^t \int_{t-1}^{0} ds + e^t = 2e^t - e^t s\Big|_{t-1}^{0} = 2e^t + e^t(t-1) = e^t(2+t-1) = e^t(t+1)$$

$$P(t) = e^t(t+1)\ ;\ t \in [0;1] \tag{31}$$

Тогда решение интегрального уравнения (12) записывается в виде:

$$R(t,s) = -e^{(t-s)} e^{-(t-s)} = -1$$

$$u(t) = e^t(t+1) - \int_{0}^{t} e^s(s+1) ds = \begin{vmatrix} u = s+1 & dv = e^s ds \\ du = ds & v = e^s \end{vmatrix} =$$

$$= e^t(t+1) - e^s(s+1)\Big|_0^t + \int_0^t e^s ds = e^t(t+1) - e^t(t+1) + 1 + e^s\Big|_0^t = 1 + e^t - 1 = e^t$$

т.е. окончательно получим решение

$$u(t) = e^t \tag{32}$$

Теперь оценим решение уравнения (28). В этом случае для интегрального уравнения (28) уравнение (8) записывается:

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{t-1}^{t} e^{t-s} v(s,\varepsilon) ds = e^t + \varepsilon\ ,\ t \in [0;1], \tag{33}$$

А начальное условие (9) выглядит следующим образом:

$$v(t,\varepsilon) = e^t\ ,\ t \in [-1;0], \tag{34}$$

То есть будем решать интегральное уравнение (33) в условии (34). Теперь мы покажем регуляризации решения интегрального уравнения (33) в начальном условии (34) и решения интегрального уравнения (28) в начальном условии (29). Для этого произведем преобразование в интегральном уравнении (33) следующим образом:

$$v(t,\varepsilon)=e^{t}+\xi(s,\varepsilon)\,,\ t\in[0;1]\,, \tag{35}$$

Затем мы приведем его к следующему интегральному уравнению относительно $\xi(t,\varepsilon)$ с начальным условием.

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{1}^{t}e^{t-s}\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon\,,\ t\in[0;1]\,, \tag{36}$$

$$\xi(t,\varepsilon)=0\,,\ t\in[-1;0]\,, \tag{37}$$

Тогда задача (36) - (37) сводится к следующему интегральному уравнению:

$$\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{0}^{t}e^{(t-s)}\xi(s,\varepsilon)ds=\varepsilon[1-e^{t}]\,,\ t\in[0;1]\,, \tag{38}$$

Дифференцируя уравнение (38), имеем:

$$\varepsilon\xi'(t,\varepsilon)+\xi(t,\varepsilon)+\int_{0}^{t}e^{t-s}\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon e^{t}\,,\ t\in[0;1]\,,$$

последнее уравнение перепишем в следующем виде:

$$\xi'(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\xi(t,\varepsilon)=-e^{t}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{t}e^{t-s}\xi(s,\varepsilon)ds\,,\ t\in[0;1]\,, \tag{39}$$

уравнения (39) линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием (37) напишем эквивалентное уравнение задача Коши (39) и (37):

$$\xi(t,\varepsilon)=-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\left(e^{t}+\int_{t_0}^{s}e^{t-s}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau\right)ds \tag{40}$$

теперь в силу (21) имеем:

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+F(t,\varepsilon) \tag{41}$$

где

$$H(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}e^{(s-\tau)}ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}e^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}s-\tau-\frac{1}{\varepsilon}t}ds=\left(-\frac{1}{\varepsilon+1}e^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}s-\tau-\frac{1}{\varepsilon}t}\right)_{\tau}^{t}=-\frac{1}{\varepsilon+1}\left(e^{t-\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\right), \tag{42}$$

$$F(t,\varepsilon)=-\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}e^{s}ds \tag{43}$$

Теперь от (42) и (43) получим следующие оценки:

$$\left|H(t,\tau,\varepsilon)\right|\leq\frac{1}{\varepsilon+1}\left|e^{t-\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\right|\leq M_0=e\,, \tag{44}$$

$$\left|F(t,\varepsilon)\right| \leq \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} e^s ds \leq e\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big|_{s=0}^{s=t} = e\varepsilon \tag{45}$$

Учитывая оценки (44), (45), из (41) получаем:

$$\left|\xi(t,\varepsilon)\right| \leq \int_0^t e\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right| d\tau + \varepsilon e,\ t \in [0;1]. \tag{46}$$

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана для (46), мы получаем следующую оценку:

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_C \leq \left\|v(t,\varepsilon) - u(t)\right\|_C = \left\|v(t,\varepsilon) - e^t\right\|_C \leq ee^e\varepsilon$$

последний стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_C \leq \lim\limits_{\varepsilon\to 0} ee^e\varepsilon = 0$

Что требовалось — доказано.

Заключение

Поставленная задача полностью решена, т. е. неклассическое интегральное уравнение Вольтерра первого рода с помощью производной решена и выявлена регуляризация. Доказанным фактом сформулирована теорема. Применен соответствующий пример, который полностью раскрывает решение и оценку.

Список литературы:

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: Теория и числ. методы. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1999. 192 с.

3. Апарцин А. С., Караулова И. В., Маркова Е. В., Труфанов В. В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. 2005. №10. С. 69-75.

4. Иманалиев М. И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 1988. №21. С. 3.

5. Асанов А., Чоюбеков С. М. Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интеграла // Известия вузов Кыргызстана. 2018. №1. С. 6-10.

6. Чоюбеков С. М. Регуляризация решения неклассического интергального уравнения со условиями Липшица // Молодой ученый. 2016. №8. С. 34-38.

7. Асанов А., Чоюбеков С. М. Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра I рода с условиями Липщица // Точная наука. 2018. №23. С. 6-11.

References:

1. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Ya. (1974). Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moscow. (in Russian).

2. Apartsin, A. S. (1999). Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda. Novosibirsk. (in Russian).

3. Apartsin, A. S., Karaulova, I. V., Markova, E. V., & Trufanov, V. V. (2005). Primenenie integral'nykh uravnenii Vol'terra dlya modelirovaniya strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya elektroenergetiki. *Elektrichestvo,* (10), 69-75. (in Russian).

4. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (1988). Regulyarizatsiya, edinstvennost' i sushchestvovanie resheniya dlya integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo roda. *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam,* (21), 3. (in Russian).

5. Asanov, A., & Choyubekov, S. M. (2018). Vybor parametra regulyarizatsii integral'nykh uravnenii Vol'terra I roda s peremennymi predelami integrala. *Izvestiya VUZov Kyrgyzstana,* (1), 6-10. (in Russian).

6. Choyubekov, S. M. (2016). Regulyarizatsiya resheniya neklassicheskogo intergal'nogo uravneniya so usloviyami Lipshitsa. *Molodoi uchenyi,* (8), 34-38. (in Russian).

7. Asanov, A., & Choyubekov, S. M. (2018). Regulyarizatsiya resheniya nelineinykh uravnenii Vol'terra I roda s usloviyami Lipshchitsa. *Tochnaya nauka,* (23), 6-11. (in Russian).

Работа поступила
в редакцию 10.03.2023 г.

Принята к публикации
17.03.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Чоюбеков С. М. Регуляризация решения неклассических линейных уравнений Вольтера первого рода с начальным условием // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №4. С. 13-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/89/01

Cite as (APA):

Choybekov, S. (2023). Regularization of the Solution of Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind With Initial Condition. *Bulletin of Science and Practice, 9*(4), 13-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/89/01