

УДК 517.928

https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/03

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

©Акматов А. А., SPIN-код: 8377-0954, Ошский государственный университет,  
г. Ош, Кыргызстан, [abdilaziz\\_akmatov@mail.ru](mailto:abdilaziz_akmatov@mail.ru)

## ON THE SUSTAINABILITY OF INDIVIDUALLY WEIGHTED DECISIONS SIMPLE DIFFERENTIAL EQUATIONS

©Акматов А., SPIN-code: 8377-0954, Osh State University,  
Osh, Kyrgyzstan, [abdilaziz\\_akmatov@mail.ru](mailto:abdilaziz_akmatov@mail.ru)

*Аннотация.* В работе исследуются решения нелинейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Собственные значения Жордановой матрицы определяют разные виды устойчивости. К этим видам устойчивости относятся двухсторонняя устойчивость и биустойчивость. Если существует двухсторонняя устойчивая область, то решения линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений оцениваются в действительной области. Соответственно существует двухсторонне устойчивые прямые, которые мы применим при выборе пути интегрирования. Если собственные значения Жордановой матрицы состоят из чисто мнимых частей, то эти собственные значения порождают биустойчивую область в плоскости. Научная новизна заключается в том, что эти виды устойчивости обнаружены в ходе исследований, и в ранее опубликованных работах не рассматривались. В итоге доказана теорема и получена оценка решений нелинейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Abstract.* The paper investigates the solution of nonlinear singularly perturbed ordinary differential equations. The eigenvalues of the Jordan matrix determine different types of stability. These types of stability include two-way stability and stability. If there is a two-sided stable domain, then solutions of linear singularly perturbed ordinary differential equations are evaluated in the real domain. Accordingly, there are two-way stable lines that we will apply when choosing the integration path. If the eigenvalues of a Jordan matrix consist of purely imaginary parts, then these eigenvalues generate a biostable region in the plane. The scientific novelty lies in the fact that these types of resistance have been discovered in the course of research, and previously published papers have not been considered. As a result, the theorem is proved and an estimate of solutions of nonlinear singularly perturbed ordinary differential equations is obtained.

*Ключевые слова:* устойчивость по Ляпунову, асимптотика, задача Коши, последовательные приближения, устойчивые кривые, решения, двухсторонняя устойчивость, биустойчивость.

*Keywords:* Lyapunov stability, asymptotics, Cauchy problem, successive approximations, stable curves, solutions, two-way stability, bistability.

### Введение

Вводим определений связанные с понятием устойчивости сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнения

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon h(t) \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0 \Big|_{x^0} = O(\varepsilon) \quad (2)$$

где  $x^0 - const$ ,  $|h(t)| \leq C_0$ ,  $C_0 - const$ .

Решение задачи (1)-(2):

$$x(t, \varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t h(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_1(s) ds\right) d\tau \quad (3)$$

*Определение 1.* Если выполняются условия  $t_0 \leq t < T_0$  ( $\operatorname{Re} a(t) < 0$ ),  $\operatorname{Re} a(T_0) = 0$ ,  $T_0 < t \leq T$  ( $\operatorname{Re} a(t) > 0$ )  $\Rightarrow \forall t \in [t_0, T]$  ( $|x(t, \varepsilon)| \leq M$ ). Тогда интервал  $[t_0, T]$  для решения  $x(t, \varepsilon)$  является затягиванием потеря устойчивости.

*Пример 1.* Пусть  $a(t) = t + i$ , тогда по определению 2 выполняется и  $t \in [-1, 1]$  будет устойчивым. Длина затягивание потеря устойчивости равна  $\delta = T - T_0 = 1$ .

*Определение 2.* Если решения задачи (1)-(2) существуют на  $t_0 \leq t < +\infty$ , ( $t_0 = 0$  не исключается) и ограничены, то решения (3) назовем, устойчивы вправо.

*Пример 2.* Пусть  $a(t) = (t+i)^{-2}$  и  $t_0 = 0$ . Тогда  $\operatorname{Re} a(t) > 0$ ,  $-\infty < t < -1$ ,  $1 < t < +\infty$ ,  $\operatorname{Re} a(T_0) = 0$ ,  $T_0 = \pm 1$ ,  $\operatorname{Re} a(t) < 0$ ,  $-1 < t < 1$ . Решение устойчиво вправо на  $t \in [0, +\infty)$ .

*Определение 3.* Если решения задачи (1)-(2) существует на  $-\infty < t \leq t_0$  и ограничены, то это решения назовем, устойчивы влево.

*Определение 4.* Назовем решение (3) биустойчивым на полуоси  $t_0 \leq t < +\infty$ , если оно устойчиво вправо и влево.

Из [5] известно, что если собственные значения состоит из чисто мнимых частей, то они устойчивы в действительной оси.

*Пример 3.* Пусть  $a(t) = 2it$ . Тогда первообразная функция  $F(t) = it^2$  биустойчива на полуоси.

*Определение 5.* Если решения задачи (1)-(2) существуют для  $-t_0 \leq t \leq t_0$ , ( $t_0 = +\infty$  не исключается) и ограничены, то это решения назовем двухсторонне устойчивыми на  $[-t_0, t_0]$ .

*Пример 4.* Пусть  $a(t) = -2t$ . Тогда функция  $F(t) = -t^2$  двухсторонне устойчива на числовой оси. Все понятие по устойчивости связано с понятием устойчивости по Ляпунову [6].

Уравнения (1) с начальной задачей (2) оценивается в действительной области, когда только тогда, когда существует двухсторонне устойчивой прямой относительно числовой оси  $t$ . В остальных случаях решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений (1) оцениваем, переходя к комплексной области.

2). Двухсторонне устойчивая прямая также существует относительно оси  $t_2$ . Покажем с помощью примера. Пусть  $a(t) = 2t$ , устойчиво  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $t = 0$  - точка смены устойчивости,  $t \in (0, +\infty)$  — неустойчиво. В качестве начальной точки возьмем точки  $t_0 = 0$ . Переходим к комплексной области. Тогда  $t = t_1 + it_2$ ,  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ,  $(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \in R$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Определим область в комплексной плоскости  $H_1 = \{(t_1, t_2): F_1(t_1, t_2) \leq 0, t_2 \geq 0, -\infty < t_1 < +\infty\}$ ,  $F_1(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2^2$ ,  $F_2(t_1, t_2) = 2it_1 t_2$ ,  $H_2 = \{(t_1, t_2): F_1(t_1, t_2) \leq 0, t_2 \leq 0, -\infty < t_1 < +\infty\}$ ,  $H = H_1 \cup H_2$ .

Определим двухсторонне устойчивой прямой в комплексной плоскости. При  $t_1 = 0$  имеем прямой относительно оси ордината или  $t_2$ . Эта прямая является частным случаем линии уровня [1]. С помощью этих прямых получим оценки решения (3). Имеем в  $H$

$$|x_1(t_1, t_2)| \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 < C - const.$$

Рассматриваемая область двухсторонне устойчивая относительно оси ординат. Прямая  $t_1 = 0$  вертикально двухсторонне устойчивая прямая.

3). Мы рассматривали горизонтальные и вертикальные двухсторонне устойчивые прямые. Теперь рассмотрим наклонные двухсторонне устойчивые прямые. Пусть  $a(t) = it$ . Действительная часть равна нулю. Поэтому переходим к комплексной области. Тогда  $t = t_1 + it_2, \tau = \tau_1 + i\tau_2, i = \sqrt{-1}, (t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \in R, u(t_1, t_2) = -2t_1t_2, \vartheta(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2^2$ . Определим области  $S_1 = \{(t_1, t_2) : u(t_1, t_2) \leq 0, t_2 \geq 0, t_1 \geq 0\}, S_2 = \{(t_1, t_2) : u(t_1, t_2) \leq 0, t_1 \leq 0, t_2 \leq 0\}, t_0 = 0$ .

Определим наклонно двухсторонне устойчивой прямой в комплексной плоскости. Прямая  $t_2 = kt_1$ , ( $k$ -коэффициент наклонностью) наклонная двухсторонне устойчивая прямая, одновременно является частным случаем линии уровня [1]. Имеем в  $S$

$$|x_1(t_1, t_2)| \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad 0 < C - const.$$

*Цель исследования.* Исследуем решения сингулярно возмущенные нелинейные дифференциальные уравнения с начальной задачей, когда собственные значения Жордановой матрицы-функции определяют условия смены устойчивости.

#### Материалы и методы исследования

Рассматривается сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = J(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon[h(t) + f(t, x(t, \varepsilon))] \quad (4)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = 0, \quad (5)$$

где  $0 < \varepsilon$  - малый параметр,  $h(t) = colon(h_1(t), h_2(t), \dots, h_{s(n)}(t))$ ,  $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in N$ ,  $t_0 = t_{01} + it_{02}$ ,  $(t_{01}, t_{02}) \in R$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $f(t, x(t, \varepsilon)) = colon(f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_{s(n)}(t, x))$ ,

$$J(t) = diag(J_1(\lambda_1(t)), J_2(\lambda_2(t)), \dots, J_{s(n)}(\lambda_n(t))) \quad , \quad \text{где} \quad J_1(\lambda_1(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 1 & \lambda_1(t) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$J_2(\lambda_2(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_2(t) & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2(t) \end{pmatrix}, \dots, \quad J_{s(n)}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_n(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_n(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_n(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n(t) \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи от правых частей (4) потребуем выполнения следующих условий:

U1.  $f(t, 0) \equiv 0, \|f(t, \tilde{x}) - f(t, \tilde{\tilde{x}})\| \leq M \times \|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|, 0 < M$  - некоторая постоянная.

U2.  $\text{Re } \lambda_k(t) > 0, -\infty < t < T_0; \text{Re } \lambda_k(0) = 0; \text{Re } \lambda_k(t) < 0, 0 < t < +\infty, k = \overline{1, 2}$ .

U3.  $\text{Re } \lambda_k(t) \equiv 0, \lambda_k(t) = i\beta(t), k = \overline{3, 5}$ .

U4.  $\text{Re } \lambda_k(t) > 0, -\infty < t < +\infty, k = \overline{6, 10}$ .

U5.  $\text{Re } \lambda_k(t) < 0, -T \leq t < T_0; \text{Re } \lambda_k(T_0) = 0; \text{Re } \lambda_k(t) > 0, T_0 < t \leq T, T > 0, k = \overline{11, 12, \dots}$ .

$$U_6. F_k(t) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds, F_k(t_0) = 0, k = 1, 2, \dots$$

Среди собственных значений Жордановой матрицы  $J(t)$  могут быть кратные комплексно собственные значения.

Имеет место следующая теорема:

*Теорема.* Пусть выполнены условия  $U_1-U_6$ . Тогда в области  $G$  решение задачи (4)-(5) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon, 0 < C - \text{const} \quad (6)$$

Доказательство. Задачу (4)-(5) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t V(t, \tau, \varepsilon) \times [h(\tau) + f(\tau, x(\tau, \varepsilon))] d\tau \quad (7)$$

$$\text{где } V(t, \tau, \varepsilon) = \operatorname{diag} \left( \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t J_1(\lambda_1(s)) ds \right), \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t J_2(\lambda_2(s)) ds \right), \dots, \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t J_n(\lambda_n(s)) ds \right) \right).$$

Для доказательства существования решения уравнения (7) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$x_0(t, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$x_m(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, \tau, \varepsilon) \times [h(\tau) + f(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon))] d\tau \quad (8)$$

$$\text{где } x_m(t, \varepsilon) = \operatorname{colon}(x_{1m}(t, \varepsilon), x_{2m}(t, \varepsilon), \dots, x_{s(n)m}(t, \varepsilon)), m = 1, 2, \dots, s(n) = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N.$$

Определяя пути интегрирования  $l_m, (m \in N), m$  приближения и соединяют точки  $(t_0, 0)$  с точкой  $(t_1; t_2)$ . Пути интегрирования проходит по двухсторонне устойчивой прямой. Для первого приближения имеем по компонентам  $|x_{s(k)}(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon(1 + C_1 + \dots + C_1^{s(k)-1}), s(k) = \frac{k(k+1)}{2},$

$$k = \overline{1, n} \cdot |x_{s(k)1}(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon(1 + C_1 + \dots + C_1^{s(k)-1}), \text{ или}$$

$$|x_{s(k)1}(t, \varepsilon)| \leq C \frac{1 - C_1^{s(k)}}{1 - C_1} = \varepsilon q_{s(k)} \quad (9)$$

$$\text{где } q_{s(k)} = C \frac{1 - C_1^{s(k)}}{1 - C_1}. \text{ Постоянная } C_1 > 0 \text{ и возможны случаи } 0 < C_1 < 1 \text{ или } C_1 > 1. \text{ Без}$$

ограничения общности можем считать, что  $C_1 > 1$ . Тогда  $q_{s(k)} < q_m \equiv C$ .

И так в силу оценки (12) вытекает, что для решения задачи (4)-(5) справедлива оценка

$$\|x_1(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon, t \in G \quad (10)$$

Пусть

$$\|x_m(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \alpha_m(\varepsilon), t \in G \quad (11)$$

где  $\alpha_m(\varepsilon)$  - некоторая положительная функция от  $\varepsilon, \alpha_1(\varepsilon) = C$ .

Оценим  $x_{m+1}(t, \varepsilon)$ . Имеем

$$|x_{1(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq |x_{11}(t, \varepsilon)| + \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))\right) \times |f_1(\tau, x_m) - f_1(\tau, 0)| d\tau \right| \leq C\varepsilon + C\varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon).$$

$$|x_{2(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq |x_{21}(t, \varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_2(t) - F_2(\tau))\right) \times |x_{1(m+1)}(\tau, \varepsilon)| + \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_2(t) - F_2(\tau))\right) \times |f_2(\tau, x_m(\tau, \varepsilon)) - f_2(\tau, 0)| d\tau \right| \right| \leq C\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (C\varepsilon + C\varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon)) \times C\varepsilon + C\varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon) =$$

$$= C\varepsilon + C^2 \varepsilon + C^2 \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon) + C\varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon).$$

Без ограничения общности считаем, что  $C \geq 1$ . Тогда

$$|x_{2(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq 2C^2 \varepsilon + 2C^2 \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon).$$

$$|x_{s(k)(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq s(k)C^{s(k)} \varepsilon + s(k)C^{s(k)} \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon) \tag{12}$$

Оценка (12) верна при  $k = 1, 2$ . Тогда

$$|x_{(s(k)+1)(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq |x_{(s(k)+1)1}(t, \varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{s(k)}(t) - F_{s(k)}(\tau))\right) |x_{s(k)(m+1)}(\tau, \varepsilon)| d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{s(k)}(t) - F_{s(k)}(\tau))\right) \times |f_{s(k)+1}(\tau, x_m(\tau, \varepsilon)) - f_{s(k)+1}(\tau, 0)| d\tau \right| \leq$$

$$\leq C\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (s(k)C^{s(k)} \varepsilon + S(k)C^{s(k)} \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon)) C\varepsilon + C\varepsilon \alpha_m(\varepsilon) \leq$$

$$\leq (s(k)+1)C^{s(k)+1} \varepsilon + (s(k)+1)C^{s(k)+1} \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon).$$

Доказано справедливость оценки (12) для любого  $s(k)$ . Таким образом, из (12) следует, что

$$|x_{s(k)(m+1)}(t, \varepsilon)| \leq s(k)C^{s(k)} \varepsilon + s(k)C^{s(k)} \varepsilon^2 \alpha_m(\varepsilon) \equiv \varepsilon \alpha_{m+1}(\varepsilon), t \in G \tag{13}$$

где  $\alpha_{m+1}(\varepsilon) = s(k)C^{s(k)} + s(k)C^{s(k)} \varepsilon \alpha_m(\varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Справедливость оценки (10) доказана.

Введем обозначение  $q = (s(k)+1)C^{s(k)}$ , тогда из (12) при условии  $\varepsilon \leq \frac{q - s(k)C^{s(k)}}{s(k)C^{s(k)} q}$

следует, что  $\forall m \in N : \alpha_m(\varepsilon) \leq q$ . Если учесть (11), то получим

$$\|x_m(t, \varepsilon)\| \leq q\varepsilon, t \in G \tag{14}$$

Теперь докажем сходимую последовательность приближений.

Пусть

$$\|x_m(t, \varepsilon) - x_{m-1}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \beta_m(\varepsilon), t \in G \tag{15}$$

Оценка (15) верна  $m = 1$ , причем  $\beta_1(\varepsilon) = C$ . Имеем

$$|x_{1(m+1)}(t, \varepsilon) - x_{1m}(t, \varepsilon)| \leq \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_1(t) - F_1(\tau))\right) |f_1(\tau, x_m) - f_1(\tau, x_{m-1})| d\tau \right| \leq C\varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon).$$

$$|x_{2(m+1)}(t, \varepsilon) - x_{2m}(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_2(t) - F_2(\tau))\right) \times |x_{1(m+1)}(\tau, \varepsilon) - x_{1m}(\tau, \varepsilon)| + \right|$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_2(t) - F_2(\tau))\right) \times |f_2(\tau, x_m) - f_2(\tau, x_{m-1})| d\tau \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^2 \varepsilon + \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^2 \varepsilon = 2C^2 \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon). \\
 & |x_{3(m+1)}(t, \varepsilon) - x_{3m}(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_3(t) - F_3(\tau))\right) \times |x_{2(m+1)}(\tau, \varepsilon) - x_{2m}(\tau, \varepsilon)| \right| + \\
 & + \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_3(t) - F_3(\tau))\right) \times |f_3(\tau, x_m(\tau, \varepsilon)) - f_3(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon))| d\tau \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^3 \varepsilon + \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^3 \varepsilon = 3C^3 \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon). \\
 & |x_{s(k)(m+1)}(t, \varepsilon) - x_{s(k)m}(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{s(k)}(t) - F_{s(k)}(\tau))\right) \times |x_{s(k)(m+1)}(\tau, \varepsilon) - x_{s(k)m}(\tau, \varepsilon)| \right| d\tau + \\
 & + \left| \int_{l_m} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{s(k)}(t) - F_{s(k)}(\tau))\right) \times |f_{s(k)}(\tau, x_m(\tau, \varepsilon)) - f_{s(k)}(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon))| d\tau \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^{s(k)} \varepsilon + \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon) C^{s(k)} \varepsilon = s(k) C^{s(k)} \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Применяя метод математической индукции нетрудно доказать справедливость оценки

$$|x_{s(k)(m+1)}(t, \varepsilon) - x_{s(k)m}(t, \varepsilon)| \leq s(k) C^{s(k)} \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon), \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, оценка (15) верна причем

$$\forall m \in N, \quad \beta_m(\varepsilon) = s(k) C^{s(k)} \varepsilon \beta_m(\varepsilon) \tag{16}$$

Из (17) при условии  $s(k) C^{s(k)} \varepsilon < 1$  следует, что последовательность функций  $\{x_m(t, \varepsilon)\}$  в  $G$  равномерно сходится к некоторой функции  $x(t, \varepsilon) \in G$ . Эта функция является решением (7). Если учесть (14), то справедлива

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon q, \quad \dagger \in \mathbb{C} \tag{17}$$

Докажем единственность решения. Допустим, что существует другое решение  $x(t, \varepsilon)$  задачи (7).

$$y(t, \varepsilon) : y(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t [h(\tau) + f(\tau, x(\tau, \varepsilon))] \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t J(s) ds\right) d\tau.$$

$$\|x_{s(k)}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq \int_{t_0}^t [(f(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon)) - f(\tau, x(\tau, \varepsilon)))] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{\tau}^t J(s) ds\right) d\tau.$$

Предположим

$$\|x_{s(k)}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq s(k) C^{s(k)} \varepsilon \beta_m(\varepsilon).$$

По методам математической индукции

$$\|x_{s(k)+1}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leq (s(k) + 1) C^{s(k)+1} \varepsilon \beta_{m+1}(\varepsilon).$$

Таким образом,  $\forall m \in N$ ,  $\|y(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)\| \leq 0 \Rightarrow x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon)$ . Единственность решения доказано. Теорема полностью доказано.

#### *Результаты и обсуждение*

В ходе исследований обнаружены новые виды устойчивых областей [5-6]. Название новых областей даны в вышеперечисленных определениях. Двухсторонне устойчивые прямые, применим при выборе пути интегрирования. Эти двухсторонне устойчивые прямые является частными случаями линии уровня [1].

Если собственные значений Жордановой матрицы состоит из чисто мнимых частей, то эти собственные значение порождают двухсторонне устойчивые области [5] в плоскости.

В работах рассматривались случаи, когда собственные значения состоящих чисто мнимых частей [2-3] и собственные значения, порождаемые устойчивости влево и вправо [4]. Но тогда нам не было известно такие виды устойчивости.

#### *Выводы*

Виды устойчивости зависят от собственных значений Жордановой матрицы. Если  $\lambda(t) = ib(t)$  тогда эти собственные значения порождают в комплексной плоскости двухсторонне устойчивые области. А также действительная ось будет устойчивой, если собственные значения состоит из действительных частей, то при благоприятных случаях появится двухсторонне устойчивые области.

Если собственные значения состоит чисто мнимых частей, тогда комплексной области смены устойчивости проходить через ось  $t_2$ .

Действительные части собственных значений Жордановой матрицы функции в двухсторонне устойчивой области меняет смены условия устойчивости.

#### *Список литературы:*

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001.
2. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33.
3. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.
4. Каримов С., Акматов А. А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости II // Естественные и технические науки. 2006. №2. С. 14-18.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. С. 162-165.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. С. 81-82.

#### *References:*

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: Dr. diss. Dzhahalal-Abad. (in Russian).
2. Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3(1), 26-33. (in Russian).

3. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1(1), 61-70. (in Russian).

4. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti II. *Estestvennye I tekhnicheskie nauki*, (2), 14-18. (in Russian).

5. Daletskii, Yu. L., Krein, M. G. (1970). Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve. Moscow, 162-165. (in Russian).

6. Demidovich, B. P. (1967). Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti. Moscow, 81-82. (in Russian).

*Работа поступила  
в редакцию 19.02.2023 г.*

*Принята к публикации  
26.02.2023 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Акматов А. А. Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №3. С. 39-46. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/03>

*Cite as (APA):*

Akmatov, A. (2023). On the Sustainability of Individually Weighted Decisions Simple Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice*, 9(3), 39-46. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/03>