УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/02

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*©**Акматов А. А.,** SPIN-код: 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

STUDIES OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

*©**Akmatov A.,** SPIN-code: 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

Аннотация. Собственные значения Жордановой матрицы определяют разные виды устойчивости. Не всегда удается получить асимптотические оценки в действительной оси. Поэтому в данной работе рассмотрим виды устойчивости, по которым можно получить оценку в действительной оси. Рассматриваемая задача нелинейная, поэтому удается получить оценку для затягивания потери устойчивости в действительной области. Чтобы вычислить интеграл применим вторую теорему о среднем в определенном интеграле. Докажем теорему, в итоге получим оценку сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Abstract. The eigenvalues of the Jordan matrix determine different types of stability. It is not always possible to obtain asymptotic estimates in the real axis. Therefore, in this paper we will consider the types of stability that can be estimated in the real axis. The problem under consideration is nonlinear, so it is possible to obtain an estimate for the delay of the loss of stability in the real domain. To calculate the integral, we apply the second theorem on the average in a certain integral. We prove the theorem as a result, we obtain an estimate of singularly perturbed ordinary differential equations.

Ключевые слова: асимптотика, устойчивость, сингулярность, возмущения, дифференциальные уравнения, теорема о среднем, оценка, начальная задача, решения.

Keywords: asymptotics, stability, singularity, perturbations, differential equations, mean theorem, estimation, initial problem, solutions.

Введение

В работе исследуется решения нелинейной задачи. Если неоднородная часть $f(t)=0$, то решению сингулярной задачи можно исследовать в действительной области. Собственные значения Жордановой матрицы определяют условия устойчивости. Например, если собственные значения состоит чисто мнимых частей, то действительная ось будет устойчивым. Соответственно исследования проводится по действительной оси. А также комплексно-сопряженные собственные значения определяют двухсторонняя устойчивая область, которая внутри этой области выполняется несколько раз смены условия устойчивости.

Цель исследования. Доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующей невозмущенной уравнений, в случае смены устойчивости.

Материалы и методы исследования

Рассматривается следующие сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = J(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0 \; \left\| x^0 \right\| = const \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр, $t \in [t_0, T]$, $f(t,x(t,\varepsilon)) = colon\left(f_1(t,x),..., f_6(t,x)\right)$, $x^0 - const$, $J(t) = diag\left(J_1(\lambda_1(t)),.J_2(\lambda_2(t))\right)$, где $J_1(\lambda_1(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1(t) \end{pmatrix}$, $J_2(\lambda_2(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_2(t) & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2(t) \end{pmatrix}$, $x(t,\varepsilon)$ — искомая неизвестная функция.

Для решения поставленной задачи от правых частей (1) потребуем выполнения следующих условий:

U1. $f(t,0) \equiv 0$, $\left\| f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \right\| \le M \times \left\| \tilde{x} - \tilde{\tilde{x}} \right\| \max\left\{ \left\|\tilde{x}\right\|, \left\|\tilde{\tilde{x}}\right\| \right\}$, $0 < M$ — некоторая постоянная, не зависящая от ε.

U2. $\operatorname{Re}\lambda_k(t) < 0$, $t_0 \le t < T_0$; $\operatorname{Re}\lambda_k(T_0) = 0$; $\operatorname{Re}\lambda_k(t) > 0$, $T_0 < t \le T$, $k = \overline{1,2}$.

Определим область

$$\Omega = \left\{ (t,x) \middle| \, t \in [t_0, T], |x| < \alpha, k = \overline{1,n} \right\},$$

где $0 < \alpha$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены условия U1-U2. Тогда $\forall t \in [t_0, T]$ решение задачи (1)-(2) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\left\| x(t,\varepsilon) \right\| \le C\delta(\varepsilon), \tag{3}$$

где $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$, $C - const$.

Доказательство. Задачу (1)-(2) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} J(s)ds \right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} J(s)ds \right) f(\tau, x(\tau,\varepsilon)) d\tau \tag{4}$$

Для доказательства существования решения уравнения (4) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$,

$$x_m(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} J(s)ds \right) + \int_{0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} J(s)ds \right) f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon)) d\tau \tag{5}$$

где $x_m(t,\varepsilon) = colon\left(x_{1m}(t,\varepsilon), x_{2m}(t,\varepsilon),..., x_{6m}(t,\varepsilon)\right)$, $m = 1,2,...$.

Учитывая U1, первое приближения будет $x_1(t,\varepsilon) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} J(s)ds \right)$.

Справедлива оценка

$$\|x_1(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \tag{6}$$

Малая величина конкретизируется завися от порядкой нули собственных значений Жордановой матрицы.

Оценим второе приближения $\|x_2(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2$.

Для m -го приближения справедлива оценка

$\|x_m(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2 + ... + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^m$, где $\tilde{C}$ — некоторая постоянная, $m \in N$.

Действительно, это можно доказать, применяя метод математической индукции. При $m = 1$ мы уже доказали верность. Пусть $m = k$:

$$\|x_k(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2 + ... + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^k.$$

Для $(k+1)$го приближения имеем:

$$\|x_{k+1}(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2 + ... + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^{k+1}.$$

Последовательные приближения равномерно ограничены, действительно,

$$\forall m \in N : \|x_m(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon).$$

Рассмотрим ряд

$$\|x_m(t,\varepsilon)\| = \|x_1(t,\varepsilon)\| + \left(\|x_2(t,\varepsilon)\| - \|x_1(t,\varepsilon)\|\right) + \left(\|x_3(t,\varepsilon)\| - \|x_2(t,\varepsilon)\|\right) + ... + \left(\|x_m(t,\varepsilon)\| - \|x_{m-1}(t,\varepsilon)\|\right)$$

Так как

$$\|x_1(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) < 1,$$

$$\|x_2(t,\varepsilon)\| - \|x_1(t,\varepsilon)\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2 < 1,$$

$$\|x_3(t,\varepsilon)\| - \|x_2(t,\varepsilon)\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^3 < 1,$$

....

$$\|x_m(t,\varepsilon)\| - \|x_{m-1}(t,\varepsilon)\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{m-1} < 1,$$

то в рассматриваемой области последовательность $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ является сходящимся и имеет предел $x(t,\varepsilon)$:

$$\|x_m(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^{m+1}}{1 - \tilde{C}\delta(\varepsilon)}\right),$$

и при $m \to \infty$ получим $\|x(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Определение. Если решения задачи (1)-(2) существует в $-t_0 \le t \le t_0$, ($t_0 = +\infty$ не исключается) и ограничено, то это решение назовем двухсторонне устойчивым на $[-t_0, t_0]$.

Пример 1. Пусть собственные значения Жорданова матрица функция будет $\lambda_1(t) = t^3 - t + i\left(2t^2 - 1\right)$, $\lambda_2(t) = t^2 - t - i\left(2t^2 - 1\right)$. Действительная часть равна $\operatorname{Re}\lambda_1(t) = \operatorname{Re}\lambda_2(t) = t^2 - t$. Действительная часть собственных значений определяет устойчивые и неустойчивые интервалы. Решаем, как уравнения имеем: $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$. $\operatorname{Re}\lambda_1(t) = \operatorname{Re}\lambda_2(t) < 0$ при $t \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$, $\operatorname{Re}\lambda_1(t) = \operatorname{Re}\lambda_2(t) > 0$ при $t \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, точка $t = -1$ является точкой перехода от устойчивого к неустойчивым интервалам, а также точка $t = 0$ является точкой перехода от неустойчивой к устойчивому интервалу.

Найдем первообразную функцию $A_1(t,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}\left(s^3-s+i\left(2s^2-1\right)\right)ds$ и также для сопряженных собственных значений $A_2(t,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}\left(s^3-s-i\left(2s^2-1\right)\right)ds$. Находим действительную и мнимую часть $\operatorname{Re}A_1(t,t_0)=\dfrac{t^4-2t^2-\left(t_0^4-2t_0^2\right)}{4}$, $\operatorname{Re}A_2(t,\varepsilon)=\dfrac{t^4-2t^2-\left(t_0^4-2t_0^2\right)}{4}$,

$$\operatorname{Im}A_1(t,t_0)=\left(\frac{2}{3}t^2-t\right)-\left(\frac{2}{3}t_0^2-t_0\right),\ \operatorname{Im}A_2(t,t_0)=-\left(\frac{2}{3}t^2-t\right)+\left(\frac{2}{3}t_0^2-t_0\right).$$

Действительную часть первообразную функцию решаем как уравнения. Тогда имеем $\operatorname{Re}A_1(t,t_0)=\operatorname{Re}A_2(t,t_0)=0$ или $t^4-2t^2-\left(t_0^4-2t_0^2\right)=0$, $\left(t^2-t_0^2\right)\left(t^2+t_0^2-2\right)=0$, имеем $t^2-t_0^2=0$ и $t^2+t_0^2-2=0$. Корни уравнения $t_1=-t_0$, $t_2=t_0$, $t_3=-\sqrt{2-t_0^2}$, $t_4=\sqrt{2-t_0^2}$.

Выделим следующие случаи:

1). Пусть $t_0=0$. Тогда $\operatorname{Re}A_1(t,0)=\operatorname{Re}A_2(t,0)\le 0$ при $t\in\left[-\sqrt{2},0\right]\cup\left[0,\sqrt{2}\right]$-устойчивый или регулярный интервал, $\operatorname{Re}A_1(t,0)=\operatorname{Re}A_2(t,0)>0$ при $t\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$- неустойчивый или сингулярный интервал.

$t\in\left[-\sqrt{2},0\right]\cup\left[0,\sqrt{2}\right]$ интервал двухсторонне устойчиво, в каждой из этих интервалах собственные значения меняет условия устойчивости. Интервал $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ является двухсторонне устойчивый интервал. Уравнению (4), решаем методом последовательных приближений $x_{10}(t,\varepsilon)\equiv 0$, $x_{11}(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)$,

$$x_{1m}(t,\varepsilon)=x^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)+\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_1(s)ds\right)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau,\ m=2,3,...$$

Оценим $\left|x_{11}(t,\varepsilon)\right|\le C\alpha_1(\varepsilon)$,

$$\left|x_{12}(t,\varepsilon)\right|\le\left|x_{11}(t,\varepsilon)\right|+\left|\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_1(s)ds\right)f(\tau,x_{11},...,x_{61})d\tau\right|+\frac{1}{\varepsilon}\left|\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_1(s)ds\right)x_{21}(\tau,\varepsilon)\right|\le$$

$$\le\left|x_{11}(t,\varepsilon)\right|+M_0\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_1(s)ds\right)\max\left\{\left|x_{11}\right|,...,\left|x_{61}\right|\right\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\left|x_2^0\right|\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)d\tau\le$$

$$\le\left|x_1^0\right|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)+M_0\left|x^0\right|\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_1(s)ds+\int\limits_{0}^{\tau}\lambda_1(s)ds\right)\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left|x_2^0\right|\int\limits_{0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{t}\lambda_1(s)ds\right)d\tau\le C\alpha_2(\varepsilon).$$ Получим $\left|x_{12}(t,\varepsilon)\right|\le C\alpha(\varepsilon)$.

Собственные значения комплексно-сопряженные, поэтому аналогично получим оценку $\left|x_{22}(t,\varepsilon)\right|\le C\alpha(\varepsilon)$.

2). Пусть $t_0=-3$. В рассматриваемой области $\operatorname{Re}\lambda_1(t)$ несколько раз меняет условия устойчивости. Оценку можно проводить в действительной области.

3). Пусть $t_0\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$. Тогда появиться две устойчивые области с затягиванием потеря устойчивости. Увеличить время задержки (потеря затягивания устойчивости) невозможно.

4). Пусть $t_0 = \pm 1$. Тогда устойчивая область не существует, потому что появиться функция $\frac{(t^2-1)^2}{4}$ всегда положительно.

Пример 2. Пусть $\lambda_1(t) = t + i$. За счет нелинейности, рассматриваемой уравнении можно увеличить затягивания потери устойчивости. Решения оценивается в действительной области.

Результаты и обсуждения. Выше рассматриваемый пример показывает, что если собственные значения удовлетворяет условию U 2, то они могут порождать двухсторонняя устойчивая область.

Двухсторонняя область состоит из двух частей. В каждой из них собственные значения сменить условия устойчивости.

Выводы

Если собственные значения Жордановой матрицы удовлетворяет условию U 2, то можно получить достаточно большое время задержки затягивания потери устойчивости. Это затягивание получается за счет нелинейности рассматриваемых уравнений.

Иногда собственные значения порождает двухсторонняя устойчивая область, которая раньше не рассматривалась.

Когда появиться двухсторонняя устойчивая область, тогда начальная точка дважды будет пограничной точкой, а ее окрестность дважды будет пограничным слоям.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад. 2001.

2. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33.

3. Акматов А. А. Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 24-31. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

4. Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 15-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

5. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.

6. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 3021. Т. 3. №1. С. 26-33.

7. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.

8. Каримов С., Акматов А. А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости II // Естественные и технические науки. 2006. №2. С. 14-18.

9. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2017. С. 180-280.

10. Турсунов Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Ош, 2014.

11. Далецский Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. С. 162-165.

12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. С. 81-82.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: Dr. diss. Dzhalal-Abad. (in Russian).

2. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian)

3. Akmatov, A. (2022). Investigation of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 15-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

4. Akmatov, A. (2022). Asymptotics of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 24-31. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

5. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v ompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian).

6. Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. (in Russian).

7. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).

8. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti II. *Estestvennye I tekhnicheskie nauki,* (2), 14-18. (in Russian).

9. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami: Dr. diss. Dzhalal-Abad.

10. Tursunov, T. A. (2013). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennykh obyknovennykh i ellipticheskikh differentsial'nykh uravnenii: Dr. diss. Osh.

11. Daletsskii, Yu. L., Krein, M. G. (1970). Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve. Moscow, 162-165. (in Russian).

12. Demidovich, B. P. (1967). Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti. Moscow, 81-82. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 19.02.2023 г.

Принята к публикации 26.02.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №3. С. 33-38. https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/02

Cite as (APA):

Akmatov, A. (2023). Studies of Solutions of Singularly Perturbed Ordinary Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(3), 33-38. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/88/02