УДК 37 https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ О ПОТОКАХ ПЛАТЕЖЕЙ

*©**Якубова У. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5831-7068, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru*
*©**Парпиева Н. Т.,** ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Профи университет, г. Ташкент, Узбекистан, nparpieva@mail.ru*
*©**Мирходжаева Н. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5370-9871, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon_7@mail.ru*

SOME NOTES ON PAYMENTS STREAMS

*©**Yakubova U.,** ORCID: 0000-0001-5831-7068, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru*
*©**Parpieva N.,** ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Professional University, г. Tashkent, Uzbekistan, nparpieva@mail.ru*
*©**Mirkhodjaeva N.,** ORCID: 0000-0001-5370-9871, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрены такие понятия как поток платежей и финансовые ренты, кредитные счеты. Приведены обобщающие характеристики потоков платежей, наращенная сумма постоянных рент постнумерандо. Рассмотрены формулы наращенной суммы, а также современная величина постоянных рент постнумерандо.

Abstract. The article discusses such concepts as the payments streams and financial annuities, credit accounts. The generalizing characteristics of payments streams, the increased amount of constant annuity postnumerando are given. The formulas of the incremented sum are considered, as well as the current value of constant annuities postnumerando.

Ключевые слова: поток платежей, финансовые ренты, кредитные счеты, наращенная сумма, рента постнумерандо, современная величина.

Keywords: payments streams, financial annuities, credit accounts, increased amount, annuity postnumerando, current value.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения любой дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания бизнес математики в экономическом вузе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1, 2].

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [3, 4].

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени. Например, заработная плата выплачивается, как правило, в виде потока платежей 2 раза в месяц, примерно через 15 дней. Плата за квартиру — поток, как правило, ежемесячных платежей. Семья откладывает на покупку автомобиля, внося ежемесячно на счет в банк некоторую сумму, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций и т. д.

Поэтому изучение потоков платежей очень важно. Такую последовательность, или ряд платежей называют *потоком платежей*, а отдельный элемент этого ряда — *членом потока.* Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты). Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют *финансовой рентой* или просто рентой, или *аннуитетом*, независимо от назначения или происхождения платежей. Например, рентой является последовательность получения процентов по облигациям, платежи по потребительскому кредиту, выплата в рассрочку страховых премий и т. п. Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты. Обобщающими характеристиками потока платежей являются *наращенная сумма и современная величина.* Каждая из этих характеристик является числом. *Наращенная сумма потока платежей* (обозначим ее S) — это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под *современной величиной потока платежей* (A) понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему. Современная величина показывает, какую сумму следовало бы иметь на этот момент, чтобы при начислении установленных процентов на момент окончания ренты получить наращенную сумму. Во всех приведенных случаях выплата или получение денег производится через равные промежутки времени.

При рассмотрении финансовой ренты используются основные категории: *член ренты* (R) — величина каждого отдельного платежа; *период ренты* (t) — временной интервал между членами ренты; *срок ренты* (n) — время от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода; *процентная ставка* (i) — ставка, используемая при наращении платежей, из которых состоит рента.

Поскольку условия финансовых сделок весьма разнообразны, постольку разнообразны и виды потоков платежей. В основе *классификации* финансовых рент положены различные качественные признаки. В зависимости от *периода продолжительности* ренты выделяют: *годовую ренту,* которые представляют собой ежегодные платежи, т. е. период ренты равен 1 году; *срочную ренту,* при которой период ренты может быть как более, так и менее года.

По *числу начислений процентов* различают: ренты с начислением 1 раз в год; ренты с начислением m раз в году; непрерывное начисление.

По величине членов ренты могут быть: *постоянные ренты*, где величина каждого отдельного платежа постоянна, т. е. рента с равными членами; *переменные ренты*, где величина платежа варьируется, т. е. рента с неравными членами.

По числу членов ренты они бывают: *с конечным числом членов* (ограниченные ренты), когда число членов ренты конечно и заранее известно; *с бесконечным числом* (вечные ренты), когда число ее членов заранее не известно.

По вероятности выплаты ренты делятся на: *верные ренты,* которые подлежат безусловной выплате, т. е. не зависят ни от каких условий, например, погашение кредита; *условные ренты*, которые зависят от наступления некоторого случайного события.

По методу выплаты платежей выделяют: *обычные ренты,* которые на практике встречаются чаще всего, – с выплатой платежа в конце периода ренты (постнумерандо); *ренты*, с выплатой в начале периода ренты (пренумерандо).

Пример. Фирма принимает платежи от клиента в уплату долга в конце каждого полугодия равными частями в течение фиксированного числа лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты в конце каждого года. Таким образом, предусматривается постоянная, срочная полугодовая, верная, с начислением процентов на платежи один раз в год, ограниченная рента постнумерандо.

Наращенная сумма постоянных рент постнумерандо. Формулы наращенной суммы. Рассмотрим наращение для различных случаев начисления ренты.

1. Обычная годовая рента.

Это самая простая рента: в ней только один платеж R в год, длительность ее n лет, годовая процентная ставка i. На рентные платежи начисляются сложные проценты. Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начисляются в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т. д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель $1+i$, число членов n. Эта сумма является наращенной суммой ренты постнумерандо. Она равна:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = RS_{ni} \quad (1)$$

где

$$S_{ni} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (2)$$

и называется *коэффициентом наращения ренты.* Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами [5].

Пример. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. С этой целью в течение 3 лет в конце каждого года в банк вносится 1000$. На взносы начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. Определить накопленную сумму к концу срока ренты.

Решение. Исходные данные R=1000, i=0,12, n=3.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \times \frac{(1+0{,}12)^3 - 1}{0{,}12} = 3374{,}4\$.$$

Это и есть наращенная сумма финансовой ренты постнумерандо.

Пример. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 1000$, на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. Исходные данные R=1000, i=0,1, n=3.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000\frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 3310\$.$$

Итак, сумма на расчетном счете к концу указанного срока будет равна 3310$.

Пример. Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1000 руб., процентная ставка i = 10%.

Годовые платежи		1000	1000	1000	1000	1000
			1100	2310	3641	5105,1
	0	1	2	3	4	5
Всего на счете		1000	2100	3310	4641	6105,1

Поясним движение денежных сумм. В конце 1 года в банк вносится 1000 руб. В конце 2 года эта сумма возрастает до 1100 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом в 1000 руб. на счете уже 2100. В конце 3 года эта сумма возрастает до 2310 руб. за счет начисленных 10%. Вместе с очередным внесенным платежом на счете теперь уже 3310 руб. и т. д. Наращенная сумма ренты равна 6105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6105,1. Получаем 6105,1/1,15 = 3791.

Нами был рассмотрен метод расчета наращенной суммы, когда рентный платеж производится один раз в год и начисление процентов также раз в год. Вместе с тем, в контрактах могут предусматриваться и другие условия поступления рентных платежей и порядок начисления процентов на них.

2. Рентные платежи вносятся один раз в год, а проценты на них начисляются m раз в году. Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи вносят один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j — номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока с процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, \ldots, R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем $(1+j/m)^m$, а число членов n. Сумма членов этой прогрессии S и будет наращенной суммой ренты:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1} \quad (3)$$

Пример. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. С этой целью в течение 3 лет в конце каждого года в банк вносится $1000. На взносы начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. Пусть теперь проценты начисляются два раза в год. Рента постнумерандо. Определить наращенную сумму к концу срока ренты.

Имеем:	Решение:
j = 0,12 m = 2 R = 1000 n = 3	Так как рента годовая, постнумерандо, проценты начисляются два раза в год, то наращенная сумма определяется по формуле (3):
S=?	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1} = 1000\frac{\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{2\cdot 3}-1}{\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{2}-1} = 3385{,}9\$.$

Пример. Для создания пенсионного фонда организация ежегодно перечисляет в банк ренту постнумерандо в размере1000$ на 6 лет. Банк начисляет проценты ежеквартально по номинальной ставке 18% годовых. Определить наращенную сумму ренты.

Решение. По формуле (3) имеем:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1} = 1000\frac{(1+0{,}18/4)^{24}-1}{(1+0{,}18/4)^{4}-1} = 2423{,}5\$.$$

3. Рентные платежи вносятся несколько раз в году равными суммами (p-срочная рента), а начисление процентов производится один раз в конце года, т. е. рента p — срочная, $m=1$.

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R — годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \dots, \frac{R}{p},$$

у которой первый член R/p, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, общее число членов *np.* Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{(1/p)^{np}}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = RS_{ni}^{p} \tag{4}$$

где

$$S_{ni}^{(p)} = \frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} \tag{5}$$

S — коэффициент наращения p — срочной ренты постнумерандо при $m=1$.

Пример. Производственная фирма приняла решение о создании инвестиционного фонда. С этой целью в течение 3 лет в конце каждого года в банк вносится $1000 так, что ежегодный взнос разбивается на 4 равные части. На взносы начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму к концу срока ренты.

Современная величина постоянных рент постнумерандо. Современная величина находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах (планирование погашения долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т. д.).

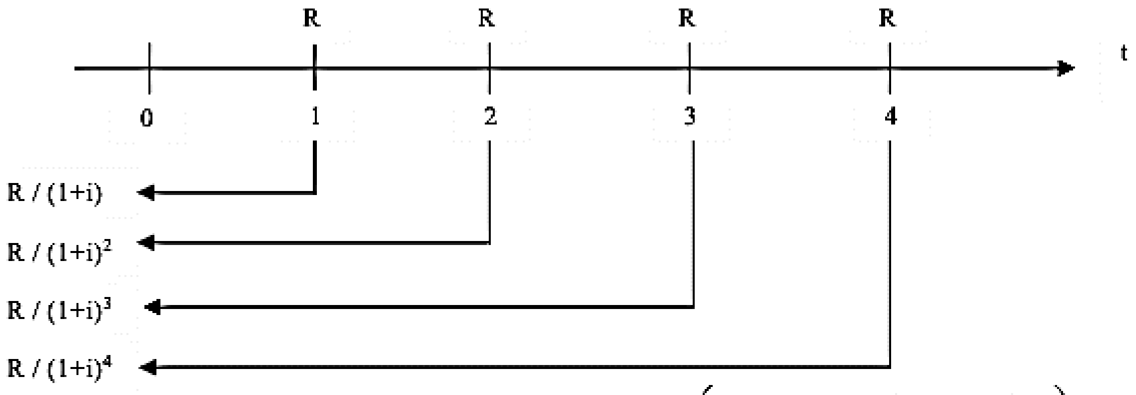
Имеем: R =$ 1000 p = 4 *i* = 0,12 n = 3	*Решение*: Так как рента срочная (поквартальная), постнумерандо, проценты начисляются на платежи один раз в год, то наращенная сумма определяется по формуле (4):
S-?	$S = R\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = 1000\frac{(1+0{,}12)^3-1}{4[(1+0{,}12)^{1/4}-1]} = 3375$ $.

Это важнейшая характеристика финансового анализа, т. к. является основой для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п. Данная характеристика показывает, какую сумму следовало иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы, на которые начислялись установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму. Под современной стоимостью *A* потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты. Рассмотрение методов определения современных величин финансовых рент начнем в том же порядке, что и наращенных сумм. Оценка современной величины производится на момент начала первого года ренты. Начнем с самого простого случая — годовой ренты постнумерандо, член которой равен *R*, срок — *n* лет, годовая ставка сложных процентов — *i*.

Годовая рента постнумерандо. Характеристики ренты $R,\ n,\ i,\ p=1,\ m=1$

Схема дисконтирования: пусть *n*=4 года. Найдем современную стоимость ренты.

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87



$$A=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\frac{R}{(1+i)^4}=\frac{R}{(1+i)}\left(1+\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}\right)=$$

$$=\frac{R}{(1+i)}\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^3}\cdot\frac{1}{(1+i)}}{1-\frac{1}{(1+i)}}=R\cdot\frac{1-\frac{1}{(1+i)^4}}{i}.$$

Замечание: воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии $S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$, первый член прогрессии $a_1=1$, знаменатель прогрессии $q=\frac{1}{1+i}$, n-й член прогрессии $a_n=\frac{1}{(1+i)^3}$.

Современная величина рассчитывается по формуле:

$$A=R\times\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} \tag{6}$$

где величина $\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ называется *коэффициентом приведения ренты*.

Обозначим его a_{ni}. Тогда формула (6) примет вид:

$$A=R\times a_{ni} \tag{7}$$

Пример. Фирме необходимо создать в течение трех лет фонд развития в размере 150 тыс руб. Фирма выделяет на эти цели в конце каждого года 41,2 тыс руб., помещая их в банк под 20% годовых (проценты сложные). Проверьте, будет ли к концу третьего года накоплена требуемая сумма. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда в 150 руб., если бы она ее поместила в банк на три года под 20% годовых (сложные проценты)?

Имеем: R = 41,2 тыс руб. n = 3 i_c = 0,2	*Решение:* Наращенная сумма при ежегодных платежах в размере 41,2 тыс руб. под 20% годовых по формуле (1) составит: $S=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}=41{,}2\times\frac{(1+0{,}2)^3-1}{0{,}2}=150000$
A =?	

Для ответа на второй вопрос задачи найдем современную величину ренты по формуле (6):

$$A=R\times\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}=41{,}2\times\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}2)^3}}{0{,}2}=86790$$

Если бы фирма указанную сумму (86,79 тыс. руб.) поместила в банк на три года под 20% годовых, наращенная сумма по годовой ставке сложных процентов составила бы:

$S=86{,}79\times(1+0{,}2)^3=150000$ тыс. руб.

Пример. Член ренты R=4 млн руб., срок ренты n=5 лет, годовая ставка i = 18,5%. Найти сегодняшнюю стоимость ренты.

Решение. $A = R \times \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 4 \times \frac{1-\frac{1}{(1+0{,}185)^5}}{0{,}185} = 12{,}368$

Полученная сумма означает, что если сегодня положить 12,368 млн руб. под годовую ставку 18,5%, то в течение 5 лет в конце каждого года можно получать по 4 млн руб.

2) При начислении процентов m раз в году современная величина ренты постнумерандо вычисляется по формуле:

$$A = R \times \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}. \quad (8)$$

3) При внесении рентных платежей несколько раз в году (р-срочная рента) и начислении процентов один раз в год, современная величина ренты постнумерандо определяется по формуле:

$$A = R \times \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]} \quad (9)$$

Таким образом, мы рассмотрели такие понятия как поток платежей и финансовые ренты, кредитные счеты. Привели обобщающие характеристики потоков платежей. Рассмотрели формулы наращенной суммы, а также научились вычислять современную величину постоянных рент постнумерандо.

Список литературы:

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

3. Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш., Парпиева Н. Т. Некоторые применения теории двойственности при решении задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 621-628. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75

4. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения графического и симплексного методов решения задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 490-498. https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57

5. Малыхин В. И. Финансовая математика. М., Юнити-дана, 2003.

References:

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice, 7*(2), 245-253. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice, 6*(4), 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

3. Yakubova, U., Mirkhodjaeva, N., & Parpieva, N. (2022). Some Applications of Duality Theory in Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 621-628. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75

4. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2022). Some Applications of Graphical and Simplex Methods for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice, 8*(4), 490-498. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57

5. Malykhin, V. I. (2003). Finansovaya matematika. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 15.01.2023 г.

Принята к публикации 20.01.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о потоках платежей // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 321-328. https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37

Cite as (APA):

Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Notes on Payments Streams. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 321-328. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37