УДК 37 https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36

# НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*©**Якубова У. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5831-7068, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru*
*©**Парпиева Н. Т.,** ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Профи университет, г. Ташкент, Узбекистан, nparpieva@mail.ru*
*©**Мирходжаева Н. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5370-9871, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon_7@mail.ru*

# SOME APPLICATIONS OF FINANCIAL MATHEMATICS IN SOLVING ECONOMIC PROBLEMS

*©**Yakubova U.,** ORCID: 0000-0001-5831-7068, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru*
*©**Parpieva N.,** ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Professional University, г. Tashkent, Uzbekistan, nparpieva@mail.ru*
*©**Mirkhodjaeva N.,** ORCID: 0000-0001-5370-9871, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru*

*Аннотация.* В работе приведена формула наращения по простым процентам, рассмотрено определение периода начисления простых процентов, определение годового периода по заданному числу дней. А также рассмотрены понятия обыкновенный простой процент, точный простой процент, приближенное время. Кроме того, решены примеры начисления простых процентов, вычислен период начисления, рассмотрены простые переменные ставки, реинвестирование по простым процентам. Использована формула наращения по сложным процентам и формулы удвоения.

*Abstract.* The paper presents a formula for increasing by simple percentages, considered the definition of the period of accrual of simple interest, the definition of the annual period for a given number of days. And also, the concepts of ordinary simple percentage, exact prime percentage, approximate time are considered. In addition, examples of accrual of simple interest were solved, the accrual period was calculated, simple variable rates, reinvestment on simple interest were considered. The formula of increment on compound interest and the formulas for doubling the amount are used.

*Ключевые слова:* финансовая математика, обычные проценты, сложные проценты, реинвестирование, период начисления, переменные ставки.

*Keywords:* financial mathematics, ordinary interest, compound interest, reinvestment, accrual period, variable rates.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения любой дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания практической математики в экономическом ВУЗе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1].

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [2].

В зарубежных университетах большое внимание уделяется изучению теории и практики финансово-экономических расчетов, необходимых при анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности, в страховом деле. Такая учебная дисциплина, охватывающая определенный круг методов вычислений, получила название финансовой математики.

Объектом изучения финансовой математики является финансовая операция, в которой есть необходимость использования финансово-экономических вычислений. Финансовая математика — это наука, которая изучает основные методы и модели количественного финансового анализа.

Таким образом, финансовая математика — раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса. Под финансовой математикой понимаются модели и алгоритмы финансовых расчетов. Базовая финансовая операция — кредитование.

*Наращения в простых и сложных процентах.* Слово «процент» происходит от латинского pro centum, т. е. «на сотню». С математической точки зрения 1% от А означает сотую долю некоторого числа А, обычно именованного, а сам символ % означает 1/100.

Например: 5% = 0,05, 5% от А = 0,05 А. В финансовой сфере А — количество каких-либо денежных единиц — рублей, долларов, марок и т. д. С экономической точки зрения «процент» представляет собой плату за использование денежных средств одного лица (кредитора) другим лицом (заемщиком, дебитором), выраженную в сотых долях от исходной суммы. Переменные ставки, которые зависят от некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней называют маржей. Получение кредита — распространенная финансовая операция. В своей простейшей форме она подразумевает участие двух лиц — кредитора и дебитора — и однократное предоставление денежной ссуды. При этом дебитор обязан вернуть полученную ссуду через точно оговоренный срок и уплатить ее в соответствии с установленным в договоре процентом. Заметим, что если под ссудой имеется в виду вклад в банке или какая-либо другая инвестиция, то процент является доходом от этой инвестиции.

Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют наращением. Обычные проценты начисляют в конце периода относительно исходной суммы средств. Доход, определяемый обычными процентами, выплачивают в конце периода финансовой операции. Авансовые проценты начисляют в начале периода относительно конечной суммы средств. Доход, определяемый авансовыми процентами, выплачивают в момент предоставления кредита. Обычным и авансовым процентам на практике соответствуют обычная процентная ставка $i$ и учетная процентная ставка $d$. Если некоторая сумма P предоставлена в долг с условием, что через $n$ лет будет возвращена большая сумма S, то обычную годовую процентную ставку $i$ рассчитывают по формуле:

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n},$$

$n$ — продолжительность финансовой операции.

Учетную годовую процентную ставку $d$ найдем по формуле:

$$d = \frac{S-P}{S \cdot n}.$$

Зная один из показателей, можно рассчитать другой по формулам:

$$i = \frac{d}{1-dn}, d = \frac{i}{1+in},$$

так называемый *дисконт-фактор* (discount factor). Далее эти понятия рассматриваются более подробно. В финансовой практике в договоре указывают обе даты — даты выдачи и погашения кредита, т. е. $t_o$ и $t_o + T$.

*Пример*. Клиент банка разместил 500 тыс руб. под 16% годовых сроком на один год. Определите его доход от этой финансовой операции.

*Решение*. Согласно условию, имеем: P= 500, $i$=0,16.

Доход D от финансовой операции составит D=500×0,16=80 тыс руб.

*Пример*. За январь цена товара увеличилась на 8%, за февраль — на 5%, а за март снизилась на 3%. На сколько процентов изменилась цена товара за первый квартал?

*Решение*. Обозначим первоначальную цену товара латинской буквой C. К концу января цена товара увеличилась на 8%, т. е. в 1,08 раза, и составила 1,08C. В течение февраля цена товара увеличилась еще на 5%, т. е. еще в 1,05 раза. И по результатам двух месяцев составила 1,08C×1,05=1,134C. В течение марта цена снизилась на 3% и составила

$$1{,}134C(1-0{,}03)= 1{,}134C\times0{,}97=1{,}1C.$$

За первый квартал цена товара увеличилась на 10%.

*Пример*. Малое предприятие получило кредит в размере 500 тыс руб. с условием возврата через три года 815 тыс руб. Определите обычную годовую процентную ставку и учетную годовую процентную ставку.

*Решение*. Согласно условию, имеем: P= 500, $n$=3.

1. Рассчитаем обычную годовую ставку:

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \frac{815-500}{500 \cdot 3} = 0{,}21(21\%).$$

2. Рассчитаем учетную годовую процентную ставку:

$$d = \frac{S-P}{S \cdot n} = \frac{815-500}{815 \cdot 3} = 0{,}129(12{,}9\%),$$

или $d = \frac{i}{1+in} = \frac{0{,}21}{1+0{,}21 \cdot 3} = 0{,}129(12{,}9\%)$.

*Формула наращения по простым процентам.* Простые проценты используют, как правило, в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года. Под *наращенной суммой долга* (ссуды, депозиты и т. д.) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока. Начисленные проценты за один период равны $P\times i$, а за $n$ периодов $Pn\times i$. Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами можно представить в виде арифметической прогрессии, членами которой являются величины:

$$P, P + Pi = P(1 + i), P(1 + i) + Pi = P(1 + 2i), \dots, P(1 + ni).$$

Первый член этой прогрессии равен $P$, разность — $Pi$, тогда последний член является наращенной суммой. Наращенную за счет начисления простых процентов сумму за $n$ процентных периодов времени можно рассчитать по формуле:

$$S = P(1 + ni) \qquad (1)$$

 

Формула (1) называется формулой *наращения по простым процентам*, или *формулой простых процентов*, а множитель $1 + ni$ в этой формуле — *множителем наращения*. Он показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы $P$ и суммы процентов $I$:

$$S=P+I, \tag{2}$$

где

$$I=Pni. \tag{3}$$

*Пример*. Определить сумму процентов и накопленного долга, если ссуда 200 тыс руб. взята на полгода при простой процентной ставке, равной 12% годовых.

*Решение*.

$$I=Pni=200\times0{,}5\times0{,}12=12.$$

$$S=P+I=200+12=212 \text{ (тыс руб.)}.$$

*Определение периода начисления простых процентов.* Простые ставки, как правило, являются годовыми. Поэтому возникает необходимость выражения данного промежутка времени в годах. Если время задано в месяцах или кварталах, то число лет определяется делением его значения соответственно на 12 или на 4. Если время задано в днях, то при определении годового периода начисления, используется определение годового периода по заданному числу дней.

*Определение годового периода по заданному числу дней.* В зависимости от значения К различают два вида простых процентов: обыкновенный простой процент и точный простой процент.

*Обыкновенный простой процент* — это простой процент при начислении процентов за один день, если базовое значение числа дней в году $K$ равно 360 дней.

*Точный простой процент* — это простой процент при начислении процентов за один день, если базовое значение числа дней в году К равно 365 или 366 дней.

*Точное время* — это число всех дней финансовой операции, включая первый или последний день.

*Приближенное время* — это число всех дней, определенное в предположении, что каждый месяц года состоит из 30 дней.

*Начисление простых процентов.* Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях: при заключении краткосрочных контрактов, срок которых не превышает одного года, и когда проценты не присоединяются к сумме долга, а выплачиваются периодически.

*Период начисления* — это промежуток времени, за который начисляются проценты.

Рассматриваемый промежуток времени называется *периодом начисления процентов.*

Процентная ставка обычно устанавливается в расчете на год. $n$ — число лет данного периода вычисляется по формуле:

$$n = \frac{t}{K} \tag{4}$$

где $K$ — базовое число дней в году которое может быть равно 360, 365 или 366; $t$ — число дней периода начисления процентов. Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то периоды $n$ начисления процентов выражают дробным числом как отношение продолжительность финансовой сделки в днях к числу дней в году. В качестве временной базы выбирают продолжительность года *K*, выраженную в тех же единицах, что и продолжительность финансовой операции t. Формула наращения в этом случае имеет вид:

$$S = P\left(1 + \frac{it}{K}\right) \tag{5}$$

Возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся временной базой *K* и способом измерения срока пользования ссудой. Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В отличие от него точный процент получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366 (если год високосный).

*Пример*. Ссуда выдана 10 марта и возвращена 17 ноября того же года. Найти точное и приближенное время периода.

*Решение*. Дано: 10 марта — 69 день года, 17 ноября — 321 день года. Найти: t.

Точное время: t=321−69=252 (дня). Для определения приближенного времени составим таблицу перехода к порядковым номерам дней и месяцев.

| *Дата* | *Порядковый номер* | |
|---|---|---|
| | *Месяц* | *день* |
| 17 ноября | 11 | 17 |
| 10 марта | 3 | 10 |
| Разность | 8 | 7 |

Учитывая, что каждый месяц содержит 30 дней, получаем приближенное время:

t=8×30+7=247 (дней).

*Пример*. Ссуда в размере $3000 положена в банк под 10% годовых с 3 апреля по 29 ноября следующего года (год не високосный). Определить двумя способами наращенную сумму.

*Решение*. Наращенную сумму найдем по формуле (5). Рассмотрим различные виды расчета.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды. Точное количество дней — 605, временная база — 365 дней, тогда

$$S = P\left(1 + \frac{it}{K}\right) = 3000\left(1 + \frac{0{,}1\cdot 605}{365}\right) = 3497{,}3\$.$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Точное количество дней — 605, временная база — 360 дней, тогда

$$S = P\left(1 + \frac{it}{K}\right) = 3000\left(1 + \frac{0{,}1\cdot 605}{360}\right) = 3504{,}2\$.$$

*Пример*. Пусть 3 млн руб. выдано в кредит на 6 месяцев под простые проценты по ставке 10% в месяц. Найдем наращенное значение долга в конце каждого месяца. Обозначим через *S(k)* наращенное значение долга в конце месяца *k*. Так как S(0) = 3 млн руб., *i* = 0,10, то в силу формулы (1):

$$S(k) = 3(1 + 0{,}10k), \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Полученный результат представим в виде таблицы.

| *K* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *S(k)* | 3 | 3,3 | 3,6 | 3,9 | 4,2 | 4,5 | 4,8 |

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87

Мы видим, что последовательность S(0), S(1), …, S(6) представляет собой арифметическую прогрессию из 7 членов с начальным членом 3 млн руб. и разностью 300 тыс руб.

*Простые переменные ставки.* Процентные ставки не всегда остаются неизменными во времени: иногда в кредитных соглашениях предусматриваются дискретно изменяющиеся процентные ставки. Тогда формула наращенной суммы имеет вид:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_k i_k) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t\right) \tag{6}$$

где $k$ — количество периодов начислений; $i_t$— ставка простых процентов в периоде с номером $t$, $t = \overline{1,k}$; $n_t$— продолжительность периода начисления процентов по ставке $i_t$, $t = \overline{1,k}$.

*Пример*. В договоре, рассчитанном на год, простая процентная ставка на I квартал установлена в размере 8% годовых, а на каждый последующий квартал на 0,005% меньше, чем в предыдущем. Определить множитель наращения $K_{нар}$ за весь срок договора.

*Решение.* Множитель наращения $K_{нар}$ определяем по формуле (6):

$$K_{нар} = 1 + \sum_{t=1}^{k} n_t i_t = 1 + 0{,}25 \times 0{,}08 + 0{,}25 \times 0{,}075 + 0{,}25 \times 0{,}07 + 0{,}25 \times 0{,}065 = 1{,}0725$$

*Реинвестирование по простым процентам.* Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована под ту же или другую процентную ставку. Процесс *реинвестирования* может повторяться неоднократно в пределах расчетного срока *N*. В случае реинвестирования краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока *N* находится по формуле:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)\ldots(1 + n_k i_k) = P\prod_{t=1}^{k}(1 + n_t i_t) \tag{7}$$

где $n_t$— продолжительность последовательных периодов реинвестирования, связанные соотношением $N = \sum_{t=1}^{k} n_t$ ; $i_t$, $t = \overline{1,k}$, ставки по которым производится реинвестирование.

*Пример*. На сумму $1000 начисляются 10% годовых. Проценты простые, точные (год не високосный). Определить наращенную сумму в двух случаях: если реинвестирование проводится за I квартал ежемесячно и, если реинвестирование не проводится.

*Решение.* Вычислим наращенную сумму при реинвестировании:

$$S = P\prod_{t=1}^{k}(1 + n_t i_t) = 1000\left(1 + \frac{0{,}1 \times 31}{365}\right)\left(1 + \frac{0{,}1 \times 28}{365}\right)\left(1 + \frac{0{,}1 \times 31}{365}\right) = 1024{,}9\$.$$

Вычислим наращенную сумму при отсутствии реинвестирования:

$$S = 1000\left(1 + \frac{0{,}1 \times 90}{365}\right) = 1024{,}66\$.$$

Из результатов вычислений можно сделать вывод, что реинвестирование увеличивают наращенную сумму.

*Сложные проценты.* Сложные проценты отличаются от простых процентов базой начисления. Если в простых процентах она остается постоянной на весь срок начисления, то в сложных при каждом начислении процентные деньги присоединяются к первоначальной базе.

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если процента не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение вычисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, иногда называют *капитализацией процентов*.

*Формула наращения по сложным процентам.* Пусть первоначальная сумма долга равна $P$, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через два года — $P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2, \dots$, через $n$ лет — $P(1+i)^n$. Таким образом, получаем формулу наращения сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n \quad (8)$$

где S — наращенная сумма; $i$ — годовая ставка сложных процентов; $n$ — срок ссуды; $(1+i)^n$ — множитель (коэффициент) наращения, который обозначим $K_{нар}$. Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член, который равен $P$, а знаменатель $1+i$. Сравним коэффициенты наращения по простым и сложным процентам по ставке 20% годовых и временной базе 360 дней. Результаты расчета поместим таблицу.

| Коэффициент наращения | 30 дней | 180 дней | 1 год | 5 лет | 10 лет |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+ni$ | 1,0167 | 1,1 | 1,2 | 2,0 | 3,0 |
| $(1+i)^n$ | 1,0153 | 1,0954 | 1,2 | 2,4883 | 6,1917 |

Отметим, что при сроке операции менее года наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным процентам, а при сроке более года – наоборот.

*Пример*. Сумма, равная 8000$, инвестируется на 3 года под 80% годовых. Найти наращенную сумму и сумму процентов за этот срок, используя простые и сложные проценты.

*Решение*:

1. Сложные проценты:

$$S = K(1+i)^n = 8000(1+0{,}8)^3 = 46656 \text{ \$}.$$

Доход I=S−P=46656−8000=38656 $.

2. Простые проценты:

$$S = K(1+ni) = 8000(1+3\times 0{,}8) = 27200\text{\$}.$$

Доход I=S−P=27200−8000=19 200 $.

За 3 года 800 тыс руб. увеличились в 5,8 раза по сложным процентам и только в 3,4 раза по простым процентам. В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, *формула наращения* имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k} \quad (9)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_k$ — последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно. Выражение $(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k}$ — множитель (коэффициент) наращения.

*Пример*. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 15% годовых, плюс переменная маржа (процент зависит от времени): 6% в первые два года, 8% в третий год, 10% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за четыре года.

*Решение.* Найдем множитель наращения:

$$K_{нар} = (1+0{,}21)^2(1+0{,}23)(1+0{,}25) = 2{,}25.$$

Множитель наращения за четыре года составляет 2,25.

*Формулы удвоения суммы.* Для оценки своих перспектив кредитору и должнику нужно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастает в $N$ раз при данной процентной ставке. Для этого приравняем множитель наращения к величине $N$, в результате получим:

1. для простых процентов $1 + ni_{прост} = N$, тогда

$$n = \frac{N-1}{i_{прост}} \quad (10)$$

2. для сложных процентов $(1 + i_{слож})^n = N$, тогда

$$n = \frac{ln\, N}{ln(1 + i_{слож})} \quad (11)$$

Для случая $N = 2$ формула (10) и (11) называются формулами удвоения.

*Пример*. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 3% годовых.

*Решение.* Для случая простых процентов расчет приведем по формуле (10):

$$n = \frac{1}{i_{прост}} = \frac{1}{0{,}03} = 33{,}33 \text{ года.}$$

Для сложных процентов — по точной формуле (11):

$$n = \frac{ln\, N}{ln(1+i_{слож})} = \frac{ln\, 2}{ln(1+i_{слож})} = 23{,}45 \text{ года.}$$

Таким образом, одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к разным результатам. Итак, мы рассмотрели формулу наращения по простым процентам, научились определять период начисления простых процентов, определять годовой период по заданному числу дней. А также рассмотрели понятия обыкновенный простой процент, точный простой процент, приближенное время. Кроме того, решили примеры начисления простых процентов, вычислили период начисления, рассмотрели простые переменные ставки, реинвестирование по простым процентам. Научились использовать формулу наращения по сложным процентам и находить период удвоения суммы.

*Список литературы:*

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

*References:*

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice,* *7*(2), 245-253. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice, 6*(4), 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

*Работа поступила в редакцию 10.01.2023 г.*

*Принята к публикации 17.01.2023 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения финансовой математики при решении экономических задач // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 312-320. https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36

*Cite as (APA):*

Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Applications of Financial Mathematics in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 312-320. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36