ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/01

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЗОНЫ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

©Омаралиева Г. А., *ORCID: 0000-0003-1862-2142, SPIN-код: 4741-5012,*
Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, guli.suiun1@gmail.com

SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF AN ADDITIONAL ZONE IN SINGULARLY PERTURBATED SECOND-ORDER BOUNDARY PROBLEM

©Omaralieva G., *ORCID: 0000-0003-1862-2142, SPIN-code: 4741-5012,*
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, guli.suiun1@gmail.com

Аннотация. Исследуются краевые задачи Дирихле, Немана и Робена для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рассматриваемые краевые задачи имеет три особенности: сингулярное присутствие малого параметра; решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс k-го порядка, и дополнительный пограничный слой. Сингулярное присутствие малого параметра порождает классический пограничный слой, а особая точка соответствующего невозмущенного уравнения порождает второй пограничный слой. В результате у нас получится двойной пограничный слой. Найдено достаточное условие существование дополнительного пограничного слоя.

Abstract. Studies the Dirichlet, Neman and Robin boundary value problems for a singularly perturbed linear inhomogeneous second order ordinary differential equation. The considered boundary value problems have three features: the singular presence of a small parameter; the solution of the corresponding unperturbed equation has a k order pole and an additional boundary layer. The singular presence of a small parameter generates the classical boundary layer, and the singular point of the corresponding unperturbed equation generates the second boundary layer. As a result, we get a double boundary layer. A sufficient condition for the existence of an additional boundary layer is found.

Ключевые слова: двойной пограничный слои, краевая задача, особая точка, сингулярное возмущение, дополнительная зона, обыкновенное дифференциальное уравнение.

Keywords: double boundary layer, boundary value problem, singular point, singular perturbation, additional zone, ordinary differential equation.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные краевые задачи, порожденные линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x) + x^k p(x) y_\varepsilon'(x) + (x^k q(x) - \varepsilon^m r(x)) y_\varepsilon(x) = f(x), x \in (0,1), \tag{1}$$

и одним из граничных условий вида:

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87

$$y_\varepsilon(0) = a, y_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

$$y'_\varepsilon(0) = a, y'_\varepsilon(1) = b, \tag{3}$$

$$y_\varepsilon(0) - \alpha y'_\varepsilon(0) = a, y_\varepsilon(1) + \beta y'_\varepsilon(1) = b, \tag{4}$$

где a, b — известные постоянные числа, $p, q, r, f \in C^\infty[0,1], f(0) \neq 0$, $0<p(0)$, $0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, (n, k, $m \in N$), а $y_\varepsilon(x)$ — искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Обычно краевую задачу (1), (2) называют задачей Дирихле; краевую задачу (1), (3) называют задачей Неймана; а задачу (1), (4) называют краевой задачей Робена [1-14].

В задаче Неймана (1), (3) предположим, что $q(1)\neq 0$ и $r(1)\neq 0$, а в задаче Робена (1), (4) потребуем выполнения условий: $p(1) - \beta q(1) \neq 0$ и $r(1)\neq 0$.

Требуется найти достаточное условие при каких соотношения параметров n и m появляется дополнительный пограничный слой в краевых задач Дирихле (1), (2); Неймана (1), (3) и Робена (1), (4) на отрезке [0,1], когда малый параметр ε стремится к нулю.

Особенности краевых задач Дирихле, Неймана и Робена. Заметим, что малый параметр ε присутствует в дифференциальном уравнении (1) при старшей производной. Поэтому, если в возмущенном дифференциальном уравнении второго порядка (1) формально считать, что $\varepsilon = 0$ (т. е. убрать возмущение), то порядок дифференциального уравнения понижается и соответствующее невозмущенное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка:

$$x^k p(x) y'_0(x) + x^k q(x) y_0(x) = f(x). \tag{5}$$

Понижение порядка уравнения, при $\varepsilon = 0$, — первая особенность рассматриваемых краевых задач Дирихле (1), (2); Неймана (1), (3) и Робена (1), (4).

Вторая особенность краевых задач (1), (2); (1), (3) и (1), (4) — дифференциальное уравнение (5) имеет особую точку при $x=0$. Решение уравнения (5) не является гладкой функцией на отрезке [0,1], которое свойственно бисингулярным задачам по терминологии А.М. Ильина [1-14].

Ниже мы докажем, что при выполнении условия $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$ в окрестности особой точки $x=0$ появляется еще один пограничный слой, кроме классического пограничного слоя — третья особенность краевых задач Дирихле (1), (2); Неймана (1), (3) и Робена (1), (4).

Краевые задачи (1), (2); (1), (3) и (1), (4) с вышеперечисленными особенностями назовем бисингулярно возмущенные задачи с двойным пограничным слоем.

Докажем теорему

Теорема. Если $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$, то в задачах Дирихле (1), (2); Неймана (1), (3) и Робена (1), (4) в окрестности левой граничной точки $x=0$ существует еще один пограничный слой, кроме классического пограничного слоя.

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Начнем с построения внешнего решения $y_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x)$ краевых задач (1), (2), (1), (3) и (1), (4), которых будем искать в виде:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x), \tag{6}$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87

где $u_j(x)$ — пока неизвестные функций. Формально подставляя ряд (6) в уравнение (1), получаем:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{n+j} u_j''(x) + x^k \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (p(x)u_j'(x) + q(x)u_j(x)) - r(x) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{m+j} u_j(x) = f(x),$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем рекуррентные соотношения:

$$x^k p(x)u'_0(x) + x^k q(x)u_0(x) = f(x), x \in (0,1]; \quad (7)$$

$$x^k p(x)u'_j(x) + x^k q(x)u_j(x) = r(x)u_{j-m}(x) - u_{j-n}''(x), j \in N, u_s(x) \equiv 0, s < 0. \quad (8)$$

Лемма 1. Уравнение (7) с соответствующим краевым условием

$$a) u_0(1) = b, b) u'_0(1) = b, c)\, u_0(1) + \beta u'_0(1) = b \quad (9)$$

имеет единственное решение представимое в виде:

$$u_0(x) = cE(x) + E(x) \int_1^x \frac{f(s)}{s^k p(s)} E^{-1}(s) ds,$$

где $E(x) = e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds}$, произвольная постоянная c примет соответствующее значение в зависимости от краевых условий:

a) c=b; b) $c = \frac{f(1) - bp(1)}{q(1)}$; c) $c = \frac{bp(1) - \beta f(1)}{p(1) - \beta q(1)}$.

При $f(0)=f_0 \neq 0$ имеем:

$$u_0(x) \to \frac{1}{x^{k-1}}, 1 < k \in N, x \to 0.$$

Доказательство. Уравнение (7) запишем в виде:

$$u'_0(x) + \frac{q(x)}{p(x)} u_0(x) = \frac{f(x)}{x^k p(x)},$$

Полученное равенство умножаем на интегрирующий множитель $e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds}$:

$$u'_0(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} + \frac{q(x)}{p(x)} u_0(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} = \frac{f(x)}{x^k p(x)} e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds},$$

Нетрудно заметить, что

$$\left(u_0(x) e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} \right)' = \frac{f(x)}{x^k p(x)} e^{\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds},$$

Интегрируя последнее равенство, получаем общее решение:

$$u_0(x) = e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds} \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)} e^{\int_1^\xi \frac{q(s)}{p(s)} ds} d\xi + c e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds},$$

где с — произвольная постоянная.

Введем обозначение $E(x) = e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)} ds}$, тогда полученное общее решение можно записать в виде

$$u_0(x) = E(x) \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)} E^{-1}(\xi)\, d\xi + cE(x).$$

Учитывая краевые условия (9) найдем соответствующие значения произвольной постоянной c:

В случае $a) u_0(1) = b$:

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 9. №2. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/87

$$u_0(1) = E(1)\int_1^1 \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)}E^{-1}(\xi)\,d\xi + cE(1) \Rightarrow u_0(1) = c \Rightarrow c = b;$$

в случае $b) u'_0(1) = b$ (сначала вычислим производную):

$$u'_0(x) = E'(x)\int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi^k p(\xi)}E^{-1}(\xi)\,d\xi + \frac{f(x)}{x^k p(x)} + cE'(x) \Rightarrow$$

$$u'_0(1) = \frac{f(1)}{p(1)} - \frac{q(1)}{p(1)}c \Rightarrow c = \frac{f(1) - bp(1)}{q(1)};$$

в случае $c)\ u_0(1) + \beta u'_0(1) = b$:

$$c + \beta\left(\frac{f(1)}{p(1)} - \frac{q(1)}{p(1)}c\right) = b \Rightarrow c = \frac{bp(1) - \beta f(1)}{p(1) - \beta q(1)}.$$

Лемма доказана.

Применяя лемму 1 последовательно к уравнениям (8) с соответствующими краевыми условиями:

$$a) u_j(1) = 0, b) u'_j(1) = 0, c)\ u_j(1) + \beta u'_j(1) = 0, j \in N,$$

получим единственные решения представимые в виде:

$$u_j(x) = 0, 1 \le j < m;$$

$$u_j(x) = c_j E(x) + E(x)\int_1^x \frac{r(s)u_{j-m}(s) - u''_{j-n}(s)}{s^k p(s)}E^{-1}(s)ds\,, m \le j \in N,$$

где произвольная постоянная c примет соответствующее значение в зависимости от краевых условий:

a) c=0; b) $c_j = \frac{r(1)u_{j-m}(1) - u''_{j-n}(1)}{q(1)}$; c) $c_j = -\frac{\beta(r(1)u_{j-m}(1) - u''_{j-n}(1))}{p(1) - \beta q(1)}$.

При $m\left(1 + \frac{2}{k-1}\right) < n$ имеем:

$$u_1(x) \to \frac{1}{x^{2(k-1)}}, 1 < k \in N, x \to 0.$$

Следовательно, ряд (6) можно представить в виде:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{x^{k-1}}\left(\tilde{u}_0(x) + \frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\tilde{u}_1(x) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\right)^j \tilde{u}_j(x) + \ldots\right), \tag{10}$$

где $\tilde{u}_j \in C^\infty[0,1], j = 0,1, \ldots$

Ряд (10) является асимптотическим относительно малого параметра ε на интервале $x \in (\sqrt[k-1]{\varepsilon^m}, 1]$, а на отрезке $x \in [0, \sqrt[k-1]{\varepsilon^m}]$ нарушается свойство асимптотичности.

Проведем детальное исследование в окрестности особой точки x=0. Для этого в окрестности этой точки сделаем растяжение координат (преобразование) $x=\varepsilon^\alpha t$, $\alpha>0$, тогда $dx=\varepsilon^\alpha dt$ и $dx^2=\varepsilon^{2\alpha}dt^2$ и уравнение (1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{k\alpha}t^k q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t) -$$
$$-\varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), t \in [0, \varepsilon^{-\alpha}],$$

Из левой части последнего равенства выделим главную часть, так как $\varepsilon^{k\alpha} < \varepsilon^{(k-1)\alpha}$, поэтому главная часть примет вид:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t).$$

Уравнивая порядков поведения слагаемых по малому параметру двух любых членов, имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие три случаи:

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

1) $n-2\alpha=(k-1)\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{n}{k+1}$; 2) $n-2\alpha=m \Rightarrow \alpha=\frac{n-m}{2}$; 3) $(k-1)\alpha=m \Rightarrow \alpha=\frac{m}{k-1}$.

В первом случае, если $\alpha=\frac{n}{k+1}$, то получим:

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}}t^k\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon^m y_\varepsilon(t).$$

Пусть $\varepsilon^m y_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)$, тогда имеем выражение:

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}-m}\left(\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}+t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}\right)-\psi_\varepsilon(t)$$

по условию $\frac{n(k-1)}{k+1}-m>0$, поэтому при $\varepsilon \to 0$ главной частью является $\psi_\varepsilon(t)$ и здесь отсутствует производная функций $\psi_\varepsilon(t)$. Поэтому случай $\alpha=\frac{n}{k+1}$ не будем рассматривать.

Во втором случае, если $\alpha=\frac{n-m}{2}$ и $\varepsilon^m y_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)$, то получим

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}-\psi_\varepsilon(t)+\varepsilon^{\frac{(k-1)(n-m)}{2}-m}t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}$$

и здесь главной частью является выражение: $\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}-\psi_\varepsilon(t)$

в которой присутствует производная второго порядка. Поэтому этот случай $\alpha=\frac{n-m}{2}$ будем исследовать.

И последний случай, если $\alpha=\frac{m}{k-1}$ и $\varepsilon^m y_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)$, то получим выражение:

$$\varepsilon^{n-m-\frac{2m}{k-1}}\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}+t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}-\psi_\varepsilon(t),$$

главной частью которого является выражение: $t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}-\psi_\varepsilon(t)$.

Этот случай тоже будем исследовать, так как и здесь в главной части присутствует производная первого порядка.

В результате в пограничном слое мы получили два характерных предела, это во втором и в третьем случаях. Нетрудно заметить, что если выполняется равенство $m=\frac{n(k-1)}{k+1}$, то все эти три случая совпадут, т. е. будут одинаковыми.

Так как $\frac{n-m}{2}>\frac{m}{k-1}$ поэтому второй случай будет описывать левый пограничный слой, а третий случай будет описывать промежуточный пограничный слой между левым пограничным слоем и внешним решением. Ряд (10) тоже подсказывает каким должна быть внутренняя переменная в соседнем пограничном слое, который пересекается с внешним решением, т. е. $x=\sqrt[k-1]{\varepsilon^m}t$.

Список литературы:

1. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.

2. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. №12. С. 3-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X

3. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. №1. С. 271-281.

4. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38. №3. P. 542-546. https://doi.org/10.1134/S1995080217030258

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

5. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2018. №3. С. 70-78. https://doi.org/10.3103/S1066369X18030088

6. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. №3. С. 332-340. https://doi.org/10.20537/vm190304

7. Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Ybadylla B. Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation εy''+xp(x)y'-q(x)y=f // Eurasian Mathematical Journal. 2022. V. 13. №3. P. 82-91. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-3-82-91

8. Турсунов Д. А., Омаралиева Г. А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. V. 28. №2. P. 193-200. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-193-200

9. Турсунов Д. А., Омаралиева Г. А. Асимптотика решения двухзонной двухточечной краевой задачи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13. №2. С. 46-52. https://doi.org/10.14529/mmph210207

10. Турсунов Д. А., Омаралиева Г. А., Маматбуваева М. И., Раманкулова Ш. А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 102-109. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_102

11. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. №0. С. 10-21. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.002

12. Tursunov D. A., Bekmurza uulu Y. Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. №3. P. 613-620. https://doi.org/10.1134/S1995080221030185

13. Tursunov D. A., Orozov M. O. Asymptotics of the solution to the Roben problem for a ring with regularly singular boundary // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. №1. P. 89-95. https://doi.org/10.1134/S1995080220010126

14. Tursunov D. A. Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions" // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika. 2018. №54. P. 46-57. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

References:

1. Il'in, A. M. (1989). Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii kraevykh zadach. Moscow. (in Russian).

2. Alymkulova, K., & Tursunovb D. A. (2016). On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems. *Russian Mathematics*, (12), 3-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X1612001X

3. Tursunov, D. A. (2016). Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, *22*(1), 271-281.

4. Tursunov, D. A. (2017). The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *38*(3), 542-546. https://doi.org/10.1134/S1995080217030258

5. Tursunov, D. A. (2018). Asymptotic solving linear bisingular problems with additional boundary layer. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 3,* 70–78. https://doi.org/10.3103/S1066369X18030088

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

6. Kozhobekova, K. G. & Tursunovba, D. A. (2019). Asymptotics of the solution to the boundary-value problem when the limit equation has an irregular singular point. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, *29*(3), 332-340. https://doi.org/10.20537/vm190304

7. Tursunov, D. A., Kozhobekov, K. G., & Ybadylla, B. U. (2022). Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation εy''+xp(x)y'-q(x)y=f. *Eurasian Mathematical Journal*, *13*(3), 82-91. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-3-82-91

8. Tursunov, D. A., & Omaralieva, G. A. (2022). An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, *28*(2), 193-200. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-193-200

9. Tursunov, D. A., & Omaralieva, G. A. (2021). Asymptotics of the solution to a two-band two-point boundary value problem. *Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics*, *13*(2), 46-52. https://doi.org/10.14529/mmph210207

10. Tursunov, D. A., Omaralieva, G .A., Mamatbuvaeva, M. I., Ramankulova, Sh. A. (2021). Singularly perturbed problem with double boundary layer. *Bulletin of Osh State University, 1*(1), 102-109. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_102

11. Tursunov, D. A. (2017). The asymptotic solution of the bisingular Robin problem. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports]*, *14*(0), 10-21. https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.002

12. Tursunov, D. A., & Bekmurza uulu, Y. (2021). Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *42*(3), 613-620. https://doi.org/10.1134/S1995080221030185

13. Tursunov, D. A., & Orozov, M. O. (2020). Asymptotics of the solution to the Roben problem for a ring with regularly singular boundary. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *41*(1), 89-95. https://doi.org/10.1134/S1995080220010126

14. Tursunov, D. A. (2018). Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of" rapid motions". *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, (54), 46-57. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

Работа поступила в редакцию 19.01.2023 г.

Принята к публикации 26.01.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Омаралиева Г. А. Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 10-16. https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/01

Cite as (APA):

Omaralieva, G. (2023). Sufficient Condition for the Existence of an Additional Zone in Singularly Perturbated Second-Order Boundary Problem. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 10-16. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/01

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)