

УДК 517.928

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/131/01>

КРИТЕРИИ ЗАДЕРЖКИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

©Алыбаев К. С., ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503,
д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет,
г. Жалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru
©Нурматова М. Н., ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-код: 2628-2591,
канд. физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет,
г. Жалал-Абад, Кыргызстан, nurmatova_mairamgul@mail.ru

CRITERIA FOR THE DELAY OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH ANALYTIC FUNCTIONS

©Alybaev K., ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil.,
Jalal-Abad State University named after B. Osmonov,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru
©Nurmatova M., SPIN-code: 2628-2591, ORCID: 0009-0003-4082-1161, Ph.D.,
Jalal-Abad State University named after B. Osmonov,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, nurmatova_mairamgul@mail.ru

Аннотация. Исследуется явление задержки решений автономных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Рассматривается система, содержащая быстрые и медленные переменные, для которой система быстрых переменных имеет положение равновесия, устойчивость которого зависит от значения медленной переменной. При прохождении медленной переменной через критическое значение положение равновесия теряет устойчивость. Однако решение системы может оставаться в окрестности этого неустойчивого положения равновесия в течение конечного интервала изменения медленной переменной. Данное явление называется задержкой решения вблизи неустойчивого положения равновесия. Явление задержки исследовано для широких классов сингулярно возмущенных систем. В известных результатах, как правило, устанавливаются достаточные условия возникновения задержки. Вопрос о необходимых и достаточных условиях в рассматриваемом классе задач требует дальнейшего исследования. В настоящей работе установлен критерий задержки решения в терминах линий уровня соответствующих гармонических функций. Показано, что необходимым и достаточным условием возникновения задержки является существование линий уровня, соединяющих устойчивый и неустойчивый интервалы. Полученный критерий позволяет характеризовать асимптотическое поведение решений в окрестности положения равновесия, теряющего устойчивость.

Abstract. The phenomenon of delay of solutions in autonomous singularly perturbed systems of differential equations is investigated. A system involving fast and slow variables is considered, in which the system of fast variables has an equilibrium state whose stability depends on the value of the slow variable. As the slow variable passes through a critical value, the equilibrium state loses stability. However, the solution of the system may continue to remain in a neighborhood of this unstable equilibrium state for a finite interval of variation of the slow variable. This phenomenon is

referred to as the delay of solutions near an unstable equilibrium state. The delay phenomenon has been studied for broad classes of singularly perturbed systems. In existing results, sufficient conditions for the occurrence of delay are generally established. The problem of determining necessary and sufficient conditions for the considered class of problems requires further investigation. In this paper, a criterion for the delay of solutions is established in terms of the level lines of the corresponding harmonic functions. It is shown that the existence of level lines connecting the stable and unstable intervals is a necessary and sufficient condition for the occurrence of delay. The obtained criterion makes it possible to characterize the asymptotic behavior of solutions in a neighborhood of an equilibrium state undergoing a loss of stability.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы; аналитические функции; задержка решений; критерий задержки; линии уровня; гармонические функции.

Keywords: singularly perturbed systems; analytic functions; delay of solutions; delay criterion; level lines; harmonic functions.

Пусть рассматривается система

$$\varepsilon x' = f(x, y), \quad (1)$$

$$y' = g(x, y), \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in [-t_0; t_0]$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Система вида (1)-(2) называется автономными сингулярно возмущенной системой (АСВС).

Основная идея исследования АСВС принадлежит Л. С. Понтрягину [1]. Он предложил исследовать систему (1) в зависимости от того каковы их стационарные решения. К примеру, стационарными решениями могут быть положения равновесия или периодические решения. В работах Л. С. Понтрягина [2] рассмотрены случаи, когда стационарными решениями являются положения равновесия. Систему (1) принято называть системой «быстрых движений».

Если (1)-(2) положить $\varepsilon = 0$, то получим соответствующую вырожденную систему

$$0 = f(x, y), \quad (3)$$

$$y' = g(x, y), \quad (4)$$

Таким образом все положения равновесия, системы «быстрых движений» определяются из системы (3). Пусть $x = \varphi(y)$ решение (3), определенное при $t \in [-t_0; t_0]$. При исследовании (1) основная роль принадлежит матрице

$$A(y) = \left\| \frac{\partial y}{\partial x} \right\|_{x=\varphi(y)}.$$

Л. С. Понтрягиным рассмотрен случай, когда матрица $A(y)$ имеет одно собственное значение, которая обращается в нуль при некотором значении y , а оставшиеся собственные значения имеют отрицательные действительные части, для рассматриваемых значений y . Таким образом для некоторых значений y (когда действительные части всех собственных значений отрицательны) положение равновесия экспоненциально устойчиво, а при некотором значении y (когда одно собственное значение обращается в нуль, а оставшиеся собственные значения имеют отрицательные действительные части) экспоненциальная устойчивость

теряется. Для значений y , когда положение равновесия экспоненциально устойчиво, систему (1)-(2) можно эффективно исследовать методами, разработанными в классических работах (например методом А. Н. Тихонова, а также в труде А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова). Однако для значений y , когда нарушается экспоненциальная устойчивость эти методы приемлемы. Для исследования решений в комплексной плоскости и анализа особенностей точек поворота важную роль играют результаты по асимптотическим разложениям, изложенные в трудах А. Эрдейи и М. В. Федорюка [3-6].

Л. С. Понтрягин исследовал асимптотическое поведение решения (1), включая значения y для которого нарушается экспоненциальная устойчивость. Доказано, что для общего случая, когда положение равновесия становится неустойчивым, то решение сопровождающее устойчивое положение равновесия сразу покидает его и отходит от него. В середине 70-х годов прошлого столетия под руководством Л. С. Понтрягина было обнаружено новое явление, которая получила название задержка решения (ЗР) вблизи неустойчивого положения равновесия [7].

Была рассмотрена система быстрых движений, состоящая из двух уравнений первого порядка, имеющая положение равновесия. Для рассматриваемого случая матрица $A(y)$ имеет комплексно-сопряженные собственные значения вида $y \pm i$. Если Л. С. Понтрягин рассмотрел случай. Когда $\det A(y)$ обращается в нуль при некотором значении y , где нарушается устойчивость положения равновесия теряется. В рассматриваемом случае, устойчивость положения равновесия теряется при $y = 0$, но $\det A(y) \neq 0$. Таким образом следует рассмотреть случаи $\det A(y) = 0$ и $\det A(y) \neq 0$ отдельно. Случаи $\det A(y) \neq 0$ исследованы в работе [2]. Доказано, что ЗР для аналитических систем является общим положением.

Если $\det A(y) = 0$, то также может произойти ЗР, только в том случае, если вырожденное уравнение имеет траекторию «утка» [8]. Математические основы этого феномена и свойства соотношения “вход-выход” для несамосопряженных систем детально исследованы в работах Э. Бэнуа [9]. Для таких случаев явление задержки решения уже не является свойством общего положения и требует условий согласования параметров.

Постановка задачи и предварительные преобразования. Для систем с аналитическими функциями формулировка критериев не были рассмотрены.

Задача. Сформулировать критерии ЗР для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями.

Поставленную задачу решим для следующей системы уравнений

$$\varepsilon x' = A(t)\tilde{x} + f(\tilde{x}) \quad (5)$$

с начальным условием

$$\|x(-t_0, \varepsilon)\| = \|x^0\| = O(\varepsilon) \quad (6)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & -\lambda_2(t) \\ \lambda_2(t) & \lambda_1(t) \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = (x_1 - t, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$,

$t \in \mathcal{D} = \{t \in \mathbb{C}, |t| \leq r_0 \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R} \text{ — соответственно множество комплексных и действительных чисел}\}$.

Матрица $A(t)$ имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_1(t) \pm i\lambda_2(t)$.

Пусть выполняются условия:

Отметим в рассматриваемом случае, согласно У2, У3 $\det A(t) \neq 0$ при $t \in [-t_0; t]$.

Таким образом, $\det A(t) \neq 0$ первый критерий для решения поставленной задачи.

У1. $\lambda_{1,2}(t) \in Q(\mathcal{D})$ – пространство аналитических функций в $\mathcal{D}$

У2. $t \in [-t_0; T_0] \subset \mathcal{D}$ (отрезок действительной оси) $\lambda_1(t) < 0$ при $-t_0 \leq t < 0$;

$\lambda_1(0) = 0; \lambda_1(t) > 0$ при $0 < t \leq t_0$.

У3. $\lambda_2(0) \neq 0$.

У4. $f(\tilde{x}) \in Q(H), H = \{(t, \tilde{x}), t \in \mathcal{D}, \|\tilde{x}\| \leq C_1\}$

У5. $f(0) \equiv 0, \forall(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) (\|f(\tilde{x}^1) - f(\tilde{x}^2)\| \leq C_2 \|\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2\| \max\{\|\tilde{x}^1\|, \|\tilde{x}^2\|\},$
 $\|\tilde{x}\| = \max(\|\tilde{x}^1\|, \|\tilde{x}^2\|).$

Здесь и далее буквами $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать положительных постоянных, не зависящих от ε .

Согласно сделанных предположений система (5) в точке $(t, 0)$ имеет положение равновесия, которая устойчива при $(-t_0 \leq t < 0)$ и неустойчива при $(0 < t \leq t_0)$, т.е. при $t = 0$ устойчивость положения равновесия теряется.

Для решения поставленной задачи систему (5), согласно условиям У1, У4 рассмотрим в области $\mathcal{D}$.

В системе (5) произведем замену неизвестной функции следующим образом: $x_1 - t = u_1, x_2 = u_2, u = (u_1, u_2)$. Получим систему

$$\varepsilon u' = A(t)u + f(u) - \varepsilon b \quad (7)$$

где $b = (1, 0)$.

(7) заменим на следующую систему

$$\varepsilon z' = \Lambda(t)z + g(z) - \varepsilon b_1 \quad (8)$$

где $z = (z_1, z_2)$, $(z_1 = u_1 + iu_2, z_2 = u_1 - iu_2)$, $\Lambda(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t)), a_1(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t), a_2(t) = \lambda_1(t) - i\lambda_2(t)$.

Согласно (6) можно предположить решение системы (8) удовлетворяет условию

$$\|z(-t_0, \varepsilon)\| \leq \|z^0\| \leq C_1 \varepsilon. \quad (9)$$

Теперь уравнение (8) с учетом (9) можно заменить следующим

$$z = z^0 V(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-t_0}^t V(\tau, t, \varepsilon) [-\varepsilon b_1 + g(z)] d\tau, \quad (10)$$

где $V(\tau, t, \varepsilon) = \text{diag}(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-t_0}^t a_1(s) ds, \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{-t_0}^t a_2(s) ds)$.

Введем обозначение $F_j(t) = \int_{-t_0}^t a_j(\tau) d\tau, j = 1, 2$.

К (10) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$z_m = z^0 V(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-t_0}^t V(\tau, t, \varepsilon) [-\varepsilon b_1 + g(z_{m-1})] d\tau, \quad (11)$$
$$z_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots; z_m = (z_{1m}, z_{2m}).$$

Оценим и докажем равномерную сходимость (11).

Прежде определим область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, где будем рассматривать (11). Для определения области $\mathcal{D}_0$ воспользуемся следующими леммами.

Геометрические построения и определение области интегрирования. Поскольку функции, входящие в правую часть системы (1), предполагаются аналитическими в комплексной области, геометрические свойства линий уровня и поведение интегралов исследуются с применением классических методов теории функций комплексного

переменного [10]. Геометрические свойства областей и обоснование применения метода линий уровня при нарушении условий устойчивости подробно изложены в работах [11-12].

Лемма 1: Пусть выполняются условия $У1$, $У2$, $У3$. Тогда существуют линии уровня:

$$(p_j) = \{t \in \mathcal{D}, \operatorname{Re} F_j(t) = p_j - \text{const}\}$$

соединяющие точки интервалов $[-t_0, 0)$, $(0, t_0]$ и условие $У3$ является необходимым и достаточным существования таких линий уровней.

Доказательство:

Согласно $У3$ существует отрезок $[-r_1, r_1]$ – действительной оси, где $\lambda_2(0) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $\lambda_2(0) > 0$. Тогда для $t \in [-r_1, r_1]$ ($\lambda_2(t) > 0$).

Если $t \in \mathcal{D}$, то рассмотрим функцию $a_1(t)$. Поскольку $\operatorname{Im} a_1(t) = \lambda_2(t)$ при действительных значениях t , то для $t \in \mathcal{D}$ существует некоторая область $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ и $\forall t \in \mathcal{D}_1$ ($\operatorname{Im} A_1(t) > 0$).

Не ограничивая общности можно взять вместо отрезка $[-r_1, r_1]$, отрезок $[-t_0, t_0]$ и $\mathcal{D}_1$ – прямоугольник с вершинами в точках $A_1(-t_0, T_1)$, $A_2(t_0, T_1)$, $A_3(t_0, -T_1)$, $A_4(-t_0, -T_1)$ (Рисунок 1).

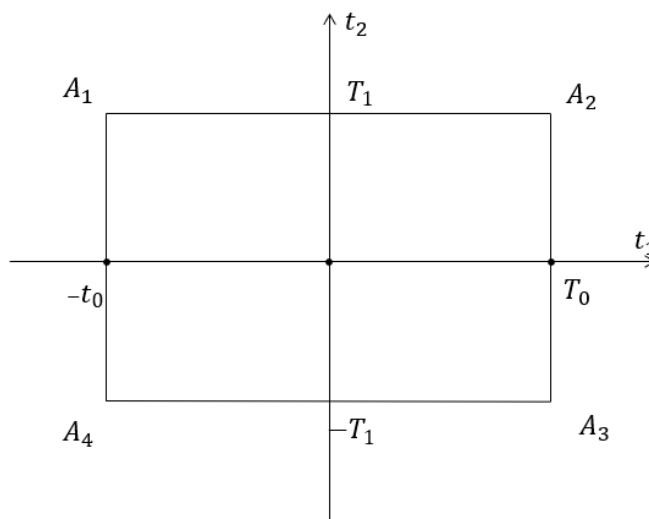


Рисунок. 1. Прямоугольник $\mathcal{D}_1$

Если рассмотреть $\operatorname{Im} a_2(t)$, то существование такого прямоугольника обоснованная, поскольку $\operatorname{Im} a_1(t)$ и $\operatorname{Im} a_2(t)$ в симметричных точках, относительно действительной оси, принимает равные значения.

Введем в рассмотрение функцию $F_1(t)$ и $\operatorname{Re} F_1(t)$. $\operatorname{Re} F_1(t)$ рассмотрим на отрезке $[-t_0; T_0]$ – действительной оси. По определению $F_1'(t) = a_1(t)$.

Тогда $(\operatorname{Re} F_1(t))' = \lambda_1(t)$. Согласно $У2$, $\operatorname{Re} F_1(t)$ убывает для $t \in [-t_0; 0]$ и возрастает для $t \in [0; T_0]$.

При этом при $t = -t_0$, $\operatorname{Re} F_1(-t_0) = 0$. Отсюда следует для $t \in (-t_0; 0]$ ($\operatorname{Re} F_1(t) < 0$). Далее при $t \in [0; T_0]$ $\operatorname{Re} F_1(t)$ – возрастает, причем $\operatorname{Re} F_1(t) \leq 0$. Будем считать, что $\operatorname{Re} F_1(T_0) = 0$. Этого всегда можно добиться уменьшая отрезок $[-t_0; T_0]$.

Согласно $У2$ ($\lambda_1(0) = 0$), существует линия уровня

$$(p_0) = \{t \in \mathcal{D}_1, \operatorname{Re} a_1(t) = 0\}$$

которая делит $\mathcal{D}_1$ на части $\mathcal{D}_{11}$ и $\mathcal{D}_{12}$. При этом справедливы соотношения $\forall t \in \mathcal{D}_{11} (Rea_1(t) \leq 0), \forall t \in \mathcal{D}_{12} (Rea_1(t) \geq 0)$.

Равенство имеет место только на границе (p_0) . Для определенности считаем, что (p_0) есть отрезок $[-T_1; T_1]$ мнимой оси (Рисунок 2).

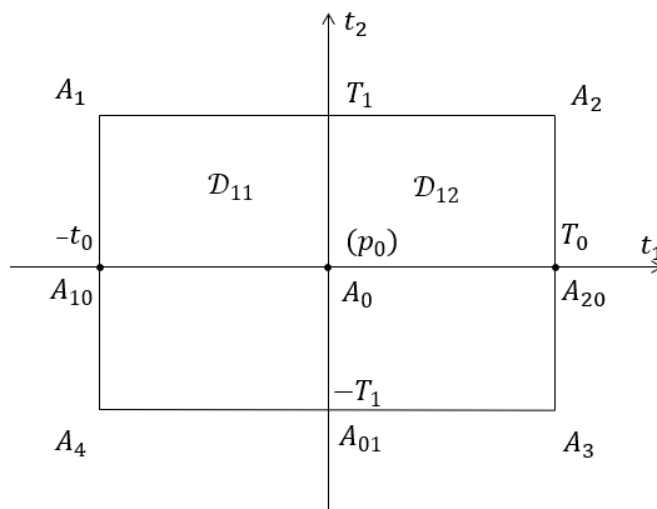


Рисунок 2. Части $\mathcal{D}_{11}$, $\mathcal{D}_{12}$ и (p_0)

По определению $ReF_1(-t_0) = 0$. Функцию $ReF_1(t)$ рассмотрим на отрезке $A_{10}A_4$. По направлению от A_{10} до A_4 функция $ReF_1(t)$ возрастает, так как $(ReF_1(t))'_{t_2} = -Ima_1(t) < 0$ (при фиксированном t_1). Тогда $\forall t \in A_{10}A_4 (ReF_1(t) \geq 0)$, равенство имеет место только при $t = -t_0$. На отрезке A_0A_{01} функция также возрастает и $\forall t \in A_0A_{01} (ReF_1(t) \leq 0)$ и $ReF_1(iT_1) = 0$.

Возьмем точки $t^1 \in A_{10}A_4, t^2 \in A_0A_{01}$. Для этих точек имеем $ReF_1(t^1) > 0, ReF_1(t^2) < 0$. Поскольку $ReF_1(t)$ строго убывает по отрезку, соединяющего точки t^1 и t^2 , то найдется единственная точка $\tilde{t}$ и $ReF_1(\tilde{t}) = 0$.

Таким образом доказано существование линии уровня

$$(p_0^1) = \{t \in \mathcal{D}_{11}, ReF_1(t) = 0\}$$

соединяющего точки $(-t_0; 0), (0; -T_1)$. Аналогично рассматривая $t^2 \in A_0A_{01}, t^1 \in A_{10}A_4$ определяем линию уровня

$$(p_0^2) = \{t \in \mathcal{D}_{12}, ReF_1(t) = 0\}$$

соединяющего точки $(0; -T_1), (T_0; 0)$.

Итого имеем $(p_0) = (p_0^1) \cup (p_0^2)$.

Аналогичным образом доказывается существование линии уровней соединяющие точки интервалов $[-t_0, 0), (0, T_0]$.

Теперь докажем, если УЗ не выполняется, то не существует линии уровня соединяющие точки интервалов $[-t_0, 0), (0, T_0]$.

По предположению $\lambda_2(0) = 0$ и $\lambda_1(0) = 0$. Тогда $a_1(t)$ в точке $t = 0$ имеет нуль. Для простоты предположим, что нуль простой. Тогда функция $F_{10}(t)$ в точке $t = 0$ имеет двукратный нуль.

$$F_{10}(t) = \int_0^t a_1(\tau) d\tau,$$

$$F_1(t) = \int_{-t_0}^t a_1(\tau) d\tau = F_{10}(t) - F_{10}(-t_0).$$

Известно, линия уровня $(q_0) = \{t \in \mathcal{D}, \operatorname{Re} F_{10}(t) = 0\}$ в точке $t = 0$ разветвляется и окрестность этой точки делит на четыре части. Эти части обозначим Ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$) (рис. 3).

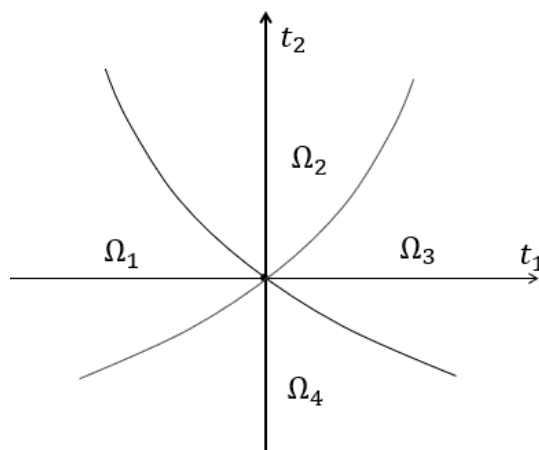


Рисунок 3. Части Ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$)

$F'_{10}(t) \equiv F'_1(t) \Rightarrow \operatorname{Re} F'_{10}(t) = \operatorname{Re} F'_1(t)$. При t – действительном, $\operatorname{Re} F_{10}(t)$ согласно У2 убывает при $t \in [-t_0; 0]$ и возрастает при $t \in [0; T_0]$. Поскольку $\operatorname{Re} F_{10}(0) = 0$, то $\forall t \in [-t_0; 0]$ ($\operatorname{Re} F_{10}(t) > 0$), $\forall t \in [0; T_0]$ ($\operatorname{Re} F_{10}(t) > 0$). Тогда справедливы следующие соотношения $\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3$ ($\operatorname{Re} F_{10}(t) \geq 0$), $\forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4$ ($\operatorname{Re} F_{10}(t) \leq 0$), при этом равенства имеют место только на границах частей. Линии уровня $\operatorname{Re} F_{10}(t)$ лежащие на частях Ω_1, Ω_3 не связанные и представляют две ветви одной и той же линии уровня (Рисунок 4).

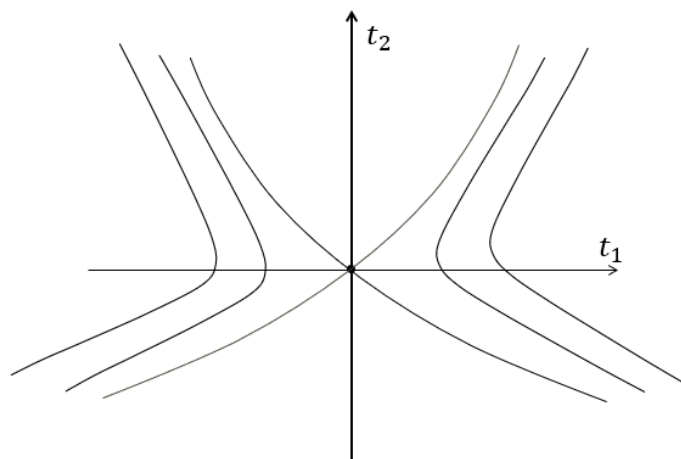


Рисунок 4. Не связанные ветви линии уровней $\operatorname{Re} F_{10}(t)$

Аналогично доказывается справедливость леммы 1 для $\operatorname{Re} F_2(t)$.

Лемма доказана полностью.

Следствие. Функции $\operatorname{Re} F_1(t)$ и $\operatorname{Re} F_2(t)$ в симметричных точках принимают равные значения, тогда линии уровня этих функций, соединяющие точки интервалов $[-t_0, 0)$, $(0, T_0]$ также симметричны.

Возьмем линии уровня (p_{10}) и $(\bar{p}_{10})$ (симметричные) соединяющие точки $(-t_0, 0)$, $(T_0, 0)$. Область ограниченная (p_{10}) и $(\bar{p}_{10})$ обозначим $\mathcal{D}_0$ (Рисунок 5).

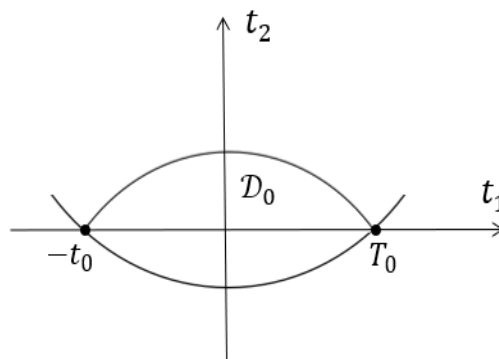


Рисунок 5. Область $\mathcal{D}_0$

Для облегчения проводимых вычислений воспользуемся леммой из [13].

Согласно Лемме 1 эту лемму можно перефразировать так:

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда существует кривая (K) соединяющая точки $(t_0; 0)$, $(T_0 - \delta; 0)$ ($0 < \delta$). (K) определяется из уравнения $ReF_1(t) = at_1 + b$, a, b – некоторые постоянные. На (K) справедливо тождество $ReF_1(t) = at_1 + b$, $-t_0 \leq t_1 \leq T_0 - \delta$ ($0 < \delta$).

$$a = -\frac{c_0 - c_1}{t_0 + T_0 - \delta} \quad (C_0 > C_1).$$

$$ReF_1(-t_0) = -at_0 + b$$

$$ReF_1(T_0 - \delta) = a(T_0 - \delta) + b$$

Согласно Лемме 2 для $ReF_2(t)$ существует кривая $(\bar{K})$ симметричная к (K) .

Область, ограниченная кривыми $(\bar{K})$ и (K) обозначим $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{01}$.

Таким образом, область, в которой будут рассматриваться последовательные приближения, определена.

Оценка приближений и доказательство равномерной сходимости. Переходим к оценке последовательных приближений. Определим пути интегрирования. Для z_{1m} путь интегрирования состоит из части (K) соединяющей точки $(-t_0; 0)$ и $\tilde{t} \in (K)$, отрезка $(\tilde{q})$ соединяющей точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2$ и $t = t_1 + it_2 \in \mathcal{D}_0$. Для z_{2m} путь выбирается симметричным к путям z_{1m} . Оценим первые приближения. Имеем

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_1^0 \exp \frac{1}{\varepsilon} F_1(t) - \int_{-t_0}^t \exp \frac{1}{\varepsilon} (F_1(t) - F_1(\tau)) d\tau = \\ &= z_1^0 \exp \frac{1}{\varepsilon} F_1(t) - \int_{\substack{-t_0 \\ (K)}}^{\tilde{t}} \exp \frac{1}{\varepsilon} (F_1(t) - F_1(\tau)) d\tau \int_{\substack{\tilde{t} \\ (\tilde{q})}}^t \exp \frac{1}{\varepsilon} (F_1(t) - F_1(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

По выбранным путям $ReF_1(t)$ убывает и $ReF_1(-t_0) = 0$, тогда $\forall t \in \mathcal{D}_0$ ($ReF_1(t) \leq 0 \wedge Re(F_1(t) - F_1(\tau)) \leq 0$). В части пути (K) $Re(F(t) - F(\tau)) = a(t_1 - \tau_1)$ ($a < 0$), $|z_1^0| \leq C_0 \varepsilon$.

Учитывая сказанное в (12) переходя к модулю, получим

$$\begin{aligned}
 |z_{11}| &\leq C_0\varepsilon + C_3 \int_{-t_0}^t \exp \frac{a}{\varepsilon} (t_1 - \tau_1) d\tau_1 + \\
 &+ \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re}(F(t) - \operatorname{Re}F(t_1 + i\tau_2)) d\tau_2 = \\
 &= C_0\varepsilon + \varepsilon \frac{C_3}{-a} \left(1 - \exp \frac{a}{\varepsilon} (t_1 + t_0)\right) + \\
 &+ \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re}(F(t) - \operatorname{Re}F(t_1 + i\tau_2)) d\tau_2 =
 \end{aligned}$$

В полученном выражении к интегралу в правой части, применяя метод интегрирование по частям получим $|z_{11}| \leq C_4\varepsilon, t \in \mathcal{D}_0$.

Параметр a не зависит от ε . Рассмотрим также случай, когда a зависит от ε .

Аналогичная оценка имеет место для z_{21} , то есть: $|z_{21}| \leq C_4\varepsilon, t \in \mathcal{D}_0$.

Рассмотрим случай, когда a не зависит от ε . Пусть справедливы оценки $|z_{1m}| \leq \alpha_m(\varepsilon)\varepsilon$, $|z_{2m}| \leq \alpha_m(\varepsilon)\varepsilon, t \in \mathcal{D}_0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Далее имеем} \quad |z_{1m+1}| &\leq |z_{11}| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{-t_0}^t \exp \frac{1}{\varepsilon} (F(t) - F(\tau)) g_1(z_{m-1}) d\tau \right| \leq |z_{11}| + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{-t_0}^t |g_1(z_{m-1})| \exp \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{Re}F(t) - \operatorname{Re}F(\tau)) |d\tau| \right| \leq C_4\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} C_5 \varepsilon^3 \alpha_m^2(\varepsilon) = C_4\varepsilon + C_5 \varepsilon^2 \alpha_m^2(\varepsilon), \\
 |z_{1m+1}| &\leq C_4\varepsilon + C_5 \varepsilon^2 \alpha_m^2(\varepsilon) = \varepsilon(C_4 + C_5 \varepsilon \alpha_m^2(\varepsilon)).
 \end{aligned}$$

Аналогично $|z_{2m+1}| \leq \varepsilon(C_4 + C_5 \varepsilon \alpha_m^2(\varepsilon))$.

Таким образом $\alpha_{m+1}(\varepsilon) = C_4 + C_5 \varepsilon \alpha_m^2(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon) = C_4$.

Имеем $\alpha_2(\varepsilon) = C_4 + C_5 \varepsilon C_4^2$.

Пусть для достаточно малых ε выполняется $C_4 + C_5 \varepsilon C_4^2 \leq C_5$ ($C_5 > C_4$) или $\varepsilon \leq \frac{C_5 - C_4}{C_4^2 C_5}$.

Тогда $\alpha_2(\varepsilon) \leq C_5$. $\alpha_3(\varepsilon) = C_4 + C_5 \varepsilon \alpha_m^2(\varepsilon) \leq C_4 + \varepsilon C_5^3$.

Пусть $\varepsilon \leq \frac{C_5 - C_4}{C_5^3}$. Тогда $\alpha_3(\varepsilon) \leq C_5$.

Продолжив процесс, получим $\alpha_{m+1}(\varepsilon) \leq C_5, m = 0, 1, \dots$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 |z_{1m}| &\leq \varepsilon \cdot C_5, \\
 |z_{2m}| &\leq \varepsilon \cdot C_5, \quad t \in \mathcal{D}_0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Докажем равномерную сходимость последовательных приближений в $\mathcal{D}_0$.

Для этого оценим $\|z_{1m} - z_{1m-1}\|$.

Пусть $\|z_{1m} - z_{1m-1}\| \leq \varepsilon \beta_m(\varepsilon)$, где $\beta_m(\varepsilon)$ – некоторая положительная функция от ε , причем $\beta_1(\varepsilon) \leq C_5$, согласно (13). Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \|z_{1m} - z_{1m-1}\| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{-t_0}^t V(t, \tau, \varepsilon) (g(z_m) - g(z_{m-1})) d\tau \right| \leq \frac{C_{20}}{\varepsilon} \left| \int_{-t_0}^t \|V(t, \tau, \varepsilon)\| \|z_m - \right. \\
 &\left. z_{m-1}\| \max(\|z_m\|, \|z_{m-1}\|) |d\tau| \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} C_0 \cdot \varepsilon \cdot C_{20} \cdot \varepsilon \cdot \beta_m(\varepsilon) \cdot C_5 \cdot \varepsilon = C_0 C_{20} C_5 \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

$$\|z_{1m} - z_{1m-1}\| \leq C_0 C_{20} C_5 \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon).$$

Тогда $\beta_{m+1}(\varepsilon) = C_0 C_{20} C_5 \varepsilon^2 \beta_m(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon) \leq C_5$

Имеем $\beta_2(\varepsilon) = C_0 C_{20} C_5 \varepsilon \beta_1(\varepsilon) \leq C_0 C_{20} C_5^2 \varepsilon$.

$$\beta_3(\varepsilon) = C_0 C_{20} C_5 \varepsilon \beta_2(\varepsilon) \leq C_0 C_{20} C_5 \varepsilon C_0 C_{20} C_5^2 \varepsilon = C_5 (C_0 C_{20} C_5 \varepsilon)^2.$$

$$\beta_4(\varepsilon) = C_0 C_{20} C_5 \varepsilon \beta_3(\varepsilon) \leq C_0 C_{20} C_5 \varepsilon C_5 (C_0 C_{20} C_5 \varepsilon)^2 \leq C_5 (C_0 C_{20} C_5 \varepsilon)^3.$$

Продолжив процесс, получим $\beta_{m+1}(\varepsilon) \leq C_5 (C_0 C_{20} C_5 \varepsilon)^{m+1}, m = 0, 1, 2, \dots$

Если $C_0 C_{20} C_5 \varepsilon < 1$, то последовательность $\{z_m\}$ в $\mathcal{D}_0$ равномерно сходится к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (10). Если учесть (13), то для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq C_5 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0 \quad (14)$$

Таким образом для решения задачи (5)-(6) получена оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq C_5 \varepsilon, t \in \mathcal{D}_0 \quad (15)$$

Доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия У1, У2, У3, У4, У5. Тогда существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и решение задачи (5)-(6) определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (15).

Выводы

1. $[-t_0, T_0 - \delta] \subset \mathcal{D}$, тогда $\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq C_5 \varepsilon$, т. е., происходит ЗР на отрезке $[0, T_0 - \delta]$ где положение равновесия неустойчива.

2. Задержка решения обусловлена существованием линии уровня, соединяющих точки устойчивого $[-t_0, 0)$ и неустойчивого $(0, T_0]$ интервалов. Согласно Лемме 1 условие У3 является необходимым и достаточным существования таких линий уровня. Следовательно, условие У3 является необходимым и достаточным условием задержки решения.

3. Если вырожденная система имеет решения $\varphi(y) \equiv \text{const}$, которые назовем тривиальными, то как показывают исследования, проведенные в [14-17], то ЗР определяется поведением интегралов $\text{Re} \int_{-t_0}^t \lambda_j(\tau) d\tau$, $(\lambda_j(\tau) - \text{собственные значения матрицы } A(y))$.

Список литературы:

1. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Известия АН СССР. Серия математическая. 1957. Т. 21. №5. С. 606-626.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 99-188.
3. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31. №3. С. 575-586.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
5. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 128 с.
6. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
7. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук СССР. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.
8. Benoit E. Chasse au canard // Collectanea mathematica. 1981. V. 32. №2. P. 37-119.
9. Benoit E. Equations differentielles: relation entrée-sortie // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie I. 1981. V. 293. №5. P. 293-296.

10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. А. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 739 с.
11. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Серия. 2001. Т. 3. С. 190-200.
12. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01>
13. Alybaev K. S., Juraev A. M., Nurmatova M. N. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45. №3. P. 912-921. <https://doi.org/10.1134/S1995080224600791>
14. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивание потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. <http://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01>
15. Нурматова М. Н. Влияние точек поворота на задержку решения вблизи неустойчивого положения равновесия // Alatau Academic Studies. 2024. №2. С. 398-411. <https://doi.org/10.17015/aas.2024.242.32>
16. Нурматова М. Н. Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 40-45. <http://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05>
17. Алыбаев К. С., Нурматова М.Н. Задержка решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2024. №5. С.13-18.

References:

1. Pontryagin, L. S. (1957). Asimptoticheskoe povedenie reshenij sistem differentsial'nykh uravnenij s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya*, 21(5), 605-626. (in Russian).
2. Pontryagin, L. S., & Mishchenko, E. F. (1985). Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenij s malym parametrom. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni VA Steklova*, 169(0), 99-118. (in Russian).
3. Tikhonov, A. N. (1952). Sistemy differentsial'nykh uravnenij, sodержashchie malye parametry pri proizvodnykh. *Matematicheskij sbornik*, 31(3), 575-586. (in Russian).
4. Vasil'eva, A. B., & Butuzov, V. F. (1990). Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushchenij. Moscow. (in Russian).
5. Erdeji, A. (1962). Asimptoticheskie razlozheniya. Moscow. (in Russian).
6. Fedoryuk, M. V. (1983). Asimptoticheskie metody dlya linejnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij. Moscow. (in Russian).
7. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoj sistemy differentsial'nykh uravnenij s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 209(3), 576-579. (in Russian).
8. Benoit, E. (1981). Chasse au canard. *Collectanea mathematica*, 32(2), 37-119.
9. Benoit, E. (1981). Équations différentielles: relation entrée-sortie. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 293(5), 293-296.
10. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. A. (1973). Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

11. Alybaev, K. S. (2001). Metod linij urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenij pri narushenii usloviya ustojchivosti. *Vestnik KGNU.–Seriya, 3*, 190-200. (in Russian).
12. Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 10*(3), 14-27. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01>
13. Alybaev, K. S., Juraev, A. M., & Nurmatova, M. N. (2024). Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 45*(3), 912-921. <https://doi.org/10.1134/S1995080224600791>
14. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01>
15. Nurmatova, M. N. (2024). Vliyanie toчек povorota na zaderzhku resheniya vblizi neustojchivogo polozheniya ravnovesiya. *Alatoo Academic Studies, (2)*, 398-411. <https://doi.org/10.17015/aas.2024.242.32>
16. Nurmatova, M. (2024). Asymptotics of Solutions of Autonomous Singularly Perturbed Equations when the Stability of the Equilibrium Position Changes at Several Points. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 40-45. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05>
17. Alybaev, K. S., & Nurmatova, M. N. (2024). Zaderzhka reshenij avtonomnykh singulyarno vozmushchennykh uravnenij pri smene ustojchivosti polozheniya ravnovesiya. *Nauka, novye tekhnologii i innovatsii Kyrgyzstana, (5)*, 13-18. (in Russian).

Поступила в редакцию
14.08.2026 г.

Принята к публикации
26.08.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Критерии задержки решений сингулярно возмущенных систем с аналитическими функциями // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №10. С. 14-25. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/131/01>

Cite as (APA):

Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2026). Criteria for the Delay of Solutions to Singularly Perturbed Systems with Analytic Functions. *Bulletin of Science and Practice, 12*(10), 14-25. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/131/01>