

УДК 517.968

https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/04

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА

©*Беделова Н. С.*, ORCID: 0000-0002-4248-4563, SPIN-код: 1451-1901, канд. физ.-мат. наук,
Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kireshe78@gmail.com

©*Махмудова А. М.*, Кыргызско-турецкий университет Манас,
г. Бишкек, Кыргызстан, makhmudovasw@gmail.com

A CLASS OF LINEAR VOLTERRA-STIELTJES INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

©*Bedelova N.*, ORCID: 0000-0002-4248-4563, SPIN-code: 1451-1901,
Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kireshe78@gmail.com

©*Makhmudova A.*, Kyrgyz-Turkish Manas University,
Bishkek, Kyrgyzstan, makhmudovasw@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. Для решения этих уравнений построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности. При исследовании применяются понятие производной по возрастающей функции, метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений. Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса высоких порядков, а также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины, теории управления сложными системами. Они могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в классах некорректных задач, для численного решения интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода, а также при решении конкретных прикладных задач, сводящихся к уравнениям третьего рода.

Abstract. This article considers the linear Volterra-Stieltjes integral equation of the third kind. To solve this equation, a regularizing operator is constructed and a uniqueness theorem is proven. The research uses the concept of a derivative with respect to an increasing function, the method of regularization according to M. M. Lavrent'ev's methods in functional analysis, methods of transformation of equations, and methods of integral and differential equations. The proposed methods can be used to study integral and integro-differential equations of the Volterra-Stieltjes type of higher orders, as well as in the qualitative study of some applied processes in the fields of physics, ecology, medicine, and the theory of control of complex systems. They can be used in the further development of the theory of integral equations in classes of ill-posed problems, in the numerical solution of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind, and when solving specific applied problems that lead to equations of the third kind.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса, регуляризация, решения, единственность, третий род.

Keywords: linear Volterra-Stieltjes integral equations, regularization, solutions, uniqueness, third kind.

В общем случае интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса не всегда сводится к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стилтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега. Поэтому изучение интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса представляют самостоятельный интерес.

Материал и методы исследования

В работе используется метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений. Получена оптимальная оценка приближенного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

Одновременно рассматриваются следующие линейные интегральные уравнения

$$m(t)\vartheta(t) + \int_{t_0}^t a(t)b(s)\vartheta(s)d\phi(s) = f(t), \quad T > t_0, \quad (1)$$

$$(\varepsilon + m(t))\vartheta(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t a(t)b(s)\vartheta(s, \varepsilon)d\phi(s) = f(t) + \varepsilon\vartheta(t_0), \quad t \in [t_0, T], \quad (2)$$

где $m(t)$, $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ — известные непрерывные функции на $[t_0, T]$, $m(t)$ — неубывающая непрерывная функция на $[t_0, T]$, $m(t_0)=0$, $\vartheta(t)$ и $\vartheta(t, \varepsilon)$ — искомые функции, $\phi(t)$ -возрастающая известная непрерывная функция на $[t_0, T]$, $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $(t, s) \in G = \{(t, s): t_0 \leq s \leq t \leq T\}$.

Здесь $[t_0, T]$ — пространство всех непрерывных функций $\vartheta(t)$, определенных на $[t_0, T]$ с нормой $\|\vartheta(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |\vartheta(t)|$.

Будем обозначать через $C_\psi^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, линейное пространство всех функций $v(t)$, определенных на $[t_0, T]$ и удовлетворяющих условию $|v(t) - v(s)| \leq M|\psi(t) - \psi(s)|^\gamma$, где M — положительная постоянная, зависящая от $\vartheta(t)$, но не от t и s , $\psi(t) = \int_{t_0}^t a(s)b(s)d\phi(s) + m(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследованы в работах многих авторов. Исследованы линейные интегральные уравнения второго рода и их системы на конечных и бесконечных интервалах. Здесь все интегралы понимается в смысле Стилтьеса [1].

Дан обзор результатов по интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [2-4].

Исследованы уравнения Вольтерра первого рода и обратные задачи. Доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. Для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [5-8].

Для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [9].

Исследованы вопросы существования и единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с особенностью в одной точке на конечном промежутке [10].

Изучен класс интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на конечном промежутке [10, 11].

Разработан улучшенный новый подход исследования линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями на конечном промежутке [10-13].

На основе понятия производная функции по возрастающей функции введенный исследовались линейные и нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого и второго родов [13].

Для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности [14].

Предположим выполнение следующих условий: а) $m(t), a(t), b(t), f(t) \in C[t_0, T], m(t_0) = 0, m(t) \geq 0, a(t) \geq 0$ и $b(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$; б) при $t \geq \tau, \tau \in [t_0, T]$ справедлива оценка $|a(t) - a(\tau)| \leq C_0[\int_{\tau}^t a(\tau)b(\tau)d\phi(\tau) + m(t)]^{\gamma_1}$, где $0 < \gamma_1 \leq 1$.

Теорема. Пусть выполняются условия а), б), $\vartheta(t)$ является решением уравнения (1) удовлетворяющих условию: $\vartheta(t) \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T], 0 < \gamma \leq 1$ $|\vartheta(t) - \vartheta(t_0)| \leq C_1 a(t), t \in [t_0, T], 0 < C_1$ - постоянная. Тогда решение $\vartheta(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к $\vartheta(t)$. При этом справедлива оценка:

$$\|\vartheta(t, \varepsilon) - \vartheta(t)\|_c \leq M(M_1 + M_3)\varepsilon^{\gamma} + M_2\varepsilon^{\gamma_1}, \quad (3)$$

где $M = \sup |\vartheta(t) - \vartheta(s)|/|\psi(t) - \psi(s)|^{\gamma}, M_1 = e \sup_{\nu \geq 0} (\nu^{\gamma} e^{-\nu}), M_2 = C_0 C_1 e \int_0^{\infty} e^{-\nu} \nu^{\gamma_1} d\nu, M_3 = e \int_0^{\infty} e^{-\nu} \nu^{\gamma} d\nu.$

Доказательство. В интегральном уравнении второго рода (2) сделаем замену:

$$\vartheta(t, \varepsilon) = \vartheta(t) + \xi(t, \varepsilon) \quad (4)$$

где $\vartheta(t)$ - решение уравнения (1). Подставляя (4) в (2) имеем $[\varepsilon + m(t)]\xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t a(t)b(s)\xi(s, \varepsilon)d\phi(s) = -\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]$, $t \in [t_0, T]$. Отсюда получим:

$$\xi(t, \varepsilon) = -\frac{a(t)}{\varepsilon + m(t)} \int_{t_0}^t b(s)\xi(s, \varepsilon)d\phi(s) - \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)}, t \in [t_0, T] \quad (5)$$

Находим решение уравнения (5), используя резольвенту:

$$R(t, s, \varepsilon) = -\frac{a(t)}{\varepsilon + m(t)} b(s) \exp \left\{ -\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau) \right\}, (t, s) \in G \quad (6)$$

ядро $K(t, s) = -\frac{a(t)}{\varepsilon + m(t)} b(s), (t, s) \in G.$ Тогда:

$$\xi(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)} + \frac{a(t)}{\varepsilon + m(t)} \int_{t_0}^t b(s) e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(s) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau), \quad (7)$$

$$t \in [t_0, T]$$

Нетрудно показать следующее тождество:

$$\int_{t_0}^t \frac{a(s)b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) = \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)} - \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t_0)} \quad (8)$$

$$* e^{-\int_{t_0}^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)}, \quad t \in [t_0, T].$$

Учитывая (8), из (7) получим:

$$\xi(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_{t_0}^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} + \int_{t_0}^t \frac{a(t)b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(s) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) - \int_{t_0}^t \frac{a(s)b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) \quad (9)$$

$$t \in [t_0, T]$$

Вводя обозначения:

$$\psi_1(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_{t_0}^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)}, \quad (10)$$

$$\psi_2(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \frac{[a(t) - a(s)]b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(s) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s), \quad (11)$$

$$\psi_3(t, \varepsilon) = -\int_{t_0}^t \frac{a(s)b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(s)]}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s), \quad (12)$$

Из (9) имеем:

$$\xi(t, \varepsilon) = \psi_1(t, \varepsilon) + \psi_2(t, \varepsilon) + \psi_3(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0, T]. \quad (13)$$

Оценим $\psi_1(t, \varepsilon)$. В силу условия теоремы из (10) получим: $|\psi_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon M}{\varepsilon + m(t)} |\psi(t)|^\gamma e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\frac{1}{\varepsilon + m(t)} \int_{t_0}^t a(\tau)b(\tau) d\phi(\tau)}} = M \varepsilon^\gamma \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + m(t)}\right)^{1-\gamma} \left[\frac{\psi(t)}{\varepsilon + m(t)}\right]^\gamma * e e^{-\frac{\psi(t)}{\varepsilon + m(t)}} \leq M \varepsilon^\gamma e \sup_{v \geq 0} (v^\gamma e^{-v})$.

Отсюда имеем:

$$\|\psi_1(t, \varepsilon)\|_c \leq M M_1 \varepsilon^\gamma. \quad (14)$$

Оценим $\psi_2(t, \varepsilon)$. В силу условия теоремы из (11) получим

$$|\psi_2(t, \varepsilon)| \leq \int_{t_0}^t \frac{a(t) - a(s)}{\varepsilon + m(t)} b(s) e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)} \frac{\varepsilon|\vartheta(s) - \vartheta(s_0)|}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) \leq \int_{t_0}^t \frac{C_0 [\int_s^t a(\tau)b(\tau) d\phi(\tau) + m(t)]^{\gamma_1}}{\varepsilon + m(t)} b(s) e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)}} \frac{\varepsilon C_1 a(s)}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) \leq C_0 C_1 \varepsilon^{\gamma_1} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + m(t)}\right)^{1-\gamma_1} e^{\int_{t_0}^t e^{-[\frac{m(t)}{\varepsilon + m(t)} + \int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)]} [\frac{m(t)}{\varepsilon + m(t)} + \int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)]^{\gamma_1} * \frac{a(s)b(s)}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) \leq C_0 C_1 e \varepsilon^{\gamma_1} \int_0^\infty e^{-v} v^{\gamma_1} dv.$$

Отсюда имеем:

$$\|\psi_2(t, \varepsilon)\|_c \leq M_2 \varepsilon^{\gamma_1} \quad (15)$$

Оценим $\psi_3(t, \varepsilon)$. В силу условия из (12) получим $|\psi(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{a(s)b(s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\varepsilon + m(\tau)} d\phi(\tau)}} \frac{1}{\varepsilon + m(s)} M [\int_s^t a(\tau)b(\tau) d\phi(\tau) + m(t)]^\gamma$

$$\leq M\epsilon\epsilon^\gamma \left(\frac{\epsilon}{\epsilon+m(t)}\right)^{1-\gamma} \int_{t_0}^t e^{-[\frac{m(t)}{\epsilon+m(t)} + \int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\epsilon+m(\tau)} d\phi(\tau)]} \left[\int_s^t \frac{a(\tau)b(\tau)}{\epsilon+m(\tau)} d\phi(\tau) + \frac{m(t)}{\epsilon+m(t)} \right]^\gamma \frac{a(s)b(s)}{\epsilon+m(s)} d\phi(s) \leq M\epsilon\epsilon^\gamma \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^\gamma d\nu.$$

Отсюда имеем:

$$\|\psi_3(t, \epsilon)\|_c \leq MM_3\epsilon^\gamma \tag{16}$$

В силу неравенств (14), (15) и (16), из (13) вытекает оценка (3). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б), $a(t) \geq a_0 > 0$ при всех $t \in [t_0, T]$ и существует $t_1 \in (t_0, T]$ такое, что $\psi(t) = m(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)d\phi(s) > 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\psi(t)} \int_{t_0}^t b(s)d\phi(s) = \alpha \in (0, \infty)$. Тогда решение интегрального уравнения третьего рода (1) единственно в пространстве $C_\psi^\gamma[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$.

Доказательство. Пусть $\vartheta(t) \in C_\psi^\gamma[t_0, T]$ является ненулевым решением уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$. Тогда $m(t)\vartheta(t) + \int_{t_0}^t a(t)b(s)\vartheta(s)d\phi(s) = 0$, $t \in [t_0, T]$.

Далее
$$m(t)\vartheta(t_0) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)d\phi(s)\vartheta(t_0) + m(t)[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)] + \int_{t_0}^t [a(t) - a(s)]b(s)\vartheta(s)d\phi(s) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)[\vartheta(s) - \vartheta(t_0)]d\phi(s) = 0.$$

Отсюда, в силу условия а) и б), имеем $|\vartheta(t_0)| \leq \frac{m(t)}{\psi(t)} |\vartheta(t) - \vartheta(t_0)| + [\sup_{s \in [t_0, t]} |\vartheta(s) - \vartheta(t_0)|] \frac{\int_{t_0}^t a(s)b(s)d\phi(s)}{\psi(t)} + \sup_{s \in [t_0, t]} |a(t) - a(s)| * \|\vartheta(t)\|_c \frac{\int_{t_0}^t b(s)d\phi(s)}{\psi(t)} \leq |\vartheta(t) - \vartheta(t_0)| + \sup_{s \in [t_0, t]} |\vartheta(s) - \vartheta(t_0)| + \sup_{s \in [t_0, t]} |a(t) - a(s)| * \|\vartheta(t)\|_c [\frac{1}{\psi(t)} \int_{t_0}^t b(s)d\phi(s)]$, $t \in (t_0, t_1)$.

Отсюда переходя к пределу при $t \rightarrow t_0$ получим $\vartheta(t_0) = 0$.

Далее, из (3) имеем:

$$\|\vartheta(t)\|_c = \|\vartheta(t, \epsilon) - \vartheta(t)\|_c \rightarrow 0 \tag{17}$$

при $\epsilon \rightarrow 0$. Так как $\vartheta(t, \epsilon) = 0$ при всех $t \in [t_0, T]$, $\epsilon > 0$. Из (17) вытекает, что $\vartheta(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Результаты и обсуждение

Для решения линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса III рода построены регуляризирующие операторы.

Заключение

Для решения линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода были сделаны следующие выводы:

1. Найдены достаточные условия единственности и регуляризации решений линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода;
2. Доказаны теоремы единственности решений для линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

Благодарности: автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Авыт Асанову за ценные советы, предложения и замечания, сделанные им при подготовке данной статьи.

Список литературы:

1. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода // *Manas Journal of Natural Sciences*. 2002. Т. 1. №2. С. 79-95.
2. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // *Manas Journal of Natural Sciences*. 2001. Т. 1. №1. С. 18-67.
3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-33.
4. Bughgeim A. L. *Volterra Equations and Inverse Problems*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014. 210 p.
5. Denisov A. M. *Elements of the theory of inverse problems*. VSP, 1999. V. 14.
6. Asanov A. Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. VSP, 1998. V. 11.
7. Цалюк З. Б. *Линейные интегральные уравнения Вольтерра*. Краснодар, 1980. 70 с.
8. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. №6. С. 734-737.
9. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. №5. С. 592-596.
10. Трикоми Ф. Д. *Интегральные уравнения*. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
11. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. №4. С. 405-409. <https://doi.org/10.7868/S0869565217160010>
12. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №3. С. 387-387. <https://doi.org/10.1134/S037406411803010X>
13. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // *Manas Journal of Natural Sciences*. 2001. Т. 1. №1. С. 18-67.
14. Bedelova N. The Choice of the Regularization Parameter for Solving Linear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind // Institute of Scientific Communications Conference. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 321-328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47945-9_36

References:

1. Asanov, A. (2002). Integral'ny'e uravneniya Vol'terra-Stil't'sesa vtorogo i pervogo roda. *Manas Journal of Natural Sciences*, 1(2), 79-95. (in Russian).
2. Asanov, A. (2001). Proizvodnaya funktsii po vozrastayushhej funktsii. *Manas Journal of Natural Sciences*, 1(1), 18-67. (in Russian).
3. Lavrent'ev, M. M. (1959). Ob integral'ny'x uravneniyax pervogo roda. *Doklady`AN SSSR*, 127(1), 31-33. (in Russian).
4. Bughgeim, A. L. (2014). *Volterra Equations and Inverse Problems*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
5. Denisov, A. M. (1999). *Elements of the theory of inverse problems*. VSP, 14.
6. Asanov, A. (1998). Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. VSP, 11.

7. Czalyuk, Z. B. (1980). Linejny`e integral`ny`e uravneniya Vol`terra. Krasnodar. (in Russian).
8. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2010). O resheniyax sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda. *Doklady` Akademii nauk*, 430(6), 734-737. (in Russian).
9. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2011). Ob odnom klasse sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda. *Doklady` Akademii nauk*, 437(5), 592-596. (in Russian).
10. Trikomi, F. D. (1960). Integral`ny`e uravneniya. Moscow. (in Russian).
11. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2017). O resheniyax sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda s mnogotochechny`mi osobennostyami. *Doklady` Akademii nauk*, 474(4), 405-409. (in Russian). <https://doi.org/10.7868/S0869565217160010>
12. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2018). Ob odnom klasse sistem linejny`x i nelinejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda s mnogotochechny`mi osobennostyami. *Differencial`ny`e uravneniya*, 54(3), 387-387. (in Russian). <https://doi.org/10.1134/S037406411803010X>
13. Asanov, A. (2001). Proizvodnaya funkicii po vozrastayushhej funkicii. *Manas Journal of Natural Sciences*, 1(1), 18-67. (in Russian).
14. Bedelova, N. (2019). The Choice of the Regularization Parameter for Solving Linear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind. *Institute of Scientific Communications Conference. Cham: Springer International Publishing*, 321-328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47945-9_36

Поступила в редакцию
23.03.2026 г.

Принята к публикации
30.03.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Беделова Н. С., Махмудова А. М. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №6. С. 40-46. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/04>

Cite as (APA):

Bedelova, N., & Makhmudova, A. (2026). A Class of Linear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind. *Bulletin of Science and Practice*, 12(6), 40-46. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/04>