УДК 517.968 https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/03

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА

*©**Беделова Н. С**., ORCID: 0000-0002-4248-4563, SPIN-код: 1451-1901, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kireshe78@gmail.com*

ON A CLASS OF NONLINEAR VOLTERRA-STIELTJES INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

*©**Bedelova N**., ORCID: 0000-0002-4248-4563, SPIN-code: 1451-1901, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kireshe78@gmail.com*

Аннотация. Рассмотрено нелинейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса третьего рода на конечном отрезке. Для решения этого уравнения построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности. При исследовании применяются понятия производной по возрастающей функции, метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, а также методы интегральных и дифференциальных уравнений. Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса высоких порядков, а также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины и теории управления сложными системами. Они могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в классах некорректных задач и для численного решения интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода, а также при решении конкретных прикладных задач, сводящихся к уравнениям третьего рода.

Abstract. This article considers the nonlinear integral Volterra-Stieltjes equation of the third kind on a finite interval. To solve this equation, a regularizing operator is constructed and a uniqueness theorem is proven. The research uses the concept of a derivative with respect to an increasing function, the method of regularization according to M. M. Lavrent'ev in functional analysis, methods of transformation of equations, and methods of integral and differential equations. The proposed methods can be used to study integral and integro-differential equations of the Volterra-Stieltjes type of higher orders, as well as in the qualitative study of some applied processes in the fields of physics, ecology, medicine, and the theory of control of complex systems. They can be used in the further development of the theory of integral equations in classes of ill-posed problems, in the numerical solution of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind, and when solving specific applied problems that lead to equations of the third kind.

Ключевые слова: регуляризация, решения, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса, третий род.

Keywords: regularization, solutions, nonlinear Volterra-Stieltjes integral equations, third kind.

В общем случае интегральные уравнения Вольтерра–Стилтьеса не всегда сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стилтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега. Поэтому изучение интегральных уравнений Вольтерра–Стилтьеса представляет самостоятельный интерес.

Материал и методы исследования

В работе используются метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений. Получена оптимальная оценка приближенного решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра–Стилтьеса третьего рода.

Одновременно рассматриваются следующие нелинейные интегральные уравнения:

$$m(t)\upsilon(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,\upsilon(s))d\phi(s)=f(t)\quad,\quad t\in[t_0,T]\,,\quad T>t_0 \tag{1}$$

$$[\varepsilon+m(t)]\vartheta(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,\vartheta(s,\varepsilon))d\phi(s)=f(t)+\varepsilon\vartheta(t_0),\quad t\in[t_0,T] \tag{2}$$

Где m(t), K(t, s, υ) и f(t) — известные функции, m(t0) = 0, m(t) — неубывающая непрерывная функция на [t0, T], υ(t) и ϑ(t, ε) — искомые функции, ϕ(t) — возрастающая известная непрерывная функция на [t0, T]. ε > 0 — малый параметр, (t, s) ∈ G = {(t, s) : t0 ⩽ s ⩽ t ⩽ T}.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследованы в работах многих авторов. В частности, исследованы линейные интегральные уравнения второго рода и их системы на конечных и бесконечных интервалах. Здесь все интегралы понимаются в смысле Стилтьеса [1].

Дан обзор результатов по интегральным уравнениям Вольтерра второго рода [2].

Для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений [3].

Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены и для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [4].

Исследованы уравнения Вольтерра первого рода и обратные задачи [5, 6].

Доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с негладкими матричными ядрами [7, 8].

Для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [9].

Для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву [10].

На основе нового подхода исследованы вопросы существования и единственности решения для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с особенностью в одной точке на конечном промежутке [11].

Изучен класс интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на конечном промежутке [11, 12].

Разработан новый улучшенный подход к исследованию систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями на конечном промежутке [11-14].

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

На основе понятия производной функции по возрастающей функции исследовались линейные и нелинейные интегральные уравнения Вольтерра–Стилтьеса первого и второго родов [14, 15].

Для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра–Стилтьеса третьего рода построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности [16].

Выбран параметр регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра–Стилтьеса третьего рода [17].

Здесь для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра–Стилтьеса третьего рода (1) построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву, доказана теорема единственности. Предполагаем, что $K(t,s,\upsilon)$ представимо в виде:

$$K(t,s,\upsilon(s)) = K_0(t,s)\upsilon(s) + K_1(t,s,\upsilon(s)) \tag{3}$$

где $(t,s;\upsilon) \in \overline{G} \times R$, $\overline{G} = \{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$.

Здесь $C[t_0,T]$ — пространство всех непрерывных функций$\upsilon(t)$, определенных на $[t_0,T]$ с нормой $\|\upsilon(t)\|_C = \max\limits_{t\in[t_0,T]}\|\upsilon(t)\|$.

Будем обозначать через $C_\psi^\gamma[t_0,T]$, $0 < \gamma \le 1$ линейное пространство всех функций $\upsilon(t)$, определенных на $[t_0,T]$ и удовлетворяющих условию:

$$|\upsilon(t) - \upsilon(s)| \le M|\psi(t) - \psi(s)|^\gamma, \text{где}\ \psi(t) = \int_{t_0}^{t} K_0(s,s)d\phi(s) + m(t), \tag{4}$$

где M — положительная постоянная, зависящая от $\upsilon(t)$, но не от t и s.

Предположим выполнение следующих условий:

а) $K_0(t,s) \in C(G)$ $K_0(t,t) \in C[t_0,T]$ и $K_0(t,t) \ge 0$, $t \in [t_0,T]$.

б) при $t > \tau$ для любых (t,s), $(\tau,s) \in G = \{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$ и для любых $(t,s,\upsilon_1), (\tau,s,\upsilon_1), (t,s,\upsilon_2), (\tau,s,\upsilon_2) \in G \times R$ справедливы оценки $|K_0(t,s) - K_0(\tau,s)| \le l_1(s)[\int_\tau^t K_0(s,s)d\phi(s) + m(t) - m(\tau)]$, $|K_1(t,s,\upsilon_1) - K_1(\tau,s,\upsilon_1) - K_1(t,s,\upsilon_2) + K_1(\tau,s,\upsilon_2)| \le l_2(s)\left[\int_\tau^t K_0(s,s)d\phi(s) + m(t) - m(\tau)\right] * |\upsilon_1 - \upsilon_2|$ где $l_1(t), l_2(t)$ неотрицательные функции из $C[t_0,T]$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия а) и

$$F_0(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon[\vartheta(t) - \vartheta(t_0)]}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} - \int_{t_0}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon + m(t)} e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} \varepsilon \frac{\vartheta(t) - \vartheta(s)}{\varepsilon + m(s)} d\phi(s) \tag{5}$$

Тогда: если $\vartheta(t) \in C[t_0,\ T]$ функция $\psi(t) = m(t) + \int_{t_0}^{t} K_0(s,s)d\phi(s)$ является строго возрастающая функция на $[t_0,\ T]$, то на сегменте $[t_0,\ T]$ справедлива оценка:

$$\|f_0(t,\varepsilon)\|_c \le 4\|\vartheta(t)\|_c \varepsilon^{1-\beta} + w_{\overline{\upsilon}}(\varepsilon^\beta), \tag{6}$$

где $\beta \in (0,1), w_{\overline{\upsilon}}(\delta) = \sup\limits_{|x-\nu|\le\delta} |\vartheta(\psi^{-1}(x)) - \vartheta(\psi^{-1}(\nu))|$, $x,\nu \in [0,\ \psi(T)]$, $\psi^{-1}(x)$ - обратная функция к функции $\psi(t)$, $t \in [t_0,\ T]$. Если $\vartheta(t) \in C_\psi^\gamma[t_0,\ T]$, $0 < \gamma \le 1$, то справедлива оценка:

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

$$\|f_0(t,\varepsilon)\|_c \le M(M_1+M_2)e\varepsilon^{\gamma}, \text{ где } M = \sup_{t,s\in[t_0,T]} |\vartheta(t)-\vartheta(s)|/|\psi(t)-\psi(s)|^{\gamma}, \quad M_1=\sup_{\nu\ge 0}[\nu^{\gamma}e^{-\nu}], \quad M_2=\int_0^{\infty} e^{-z}z^{\gamma}dz \tag{7}$$

Доказательство.

а) $t_0 \le t \le \psi^{-1}(\varepsilon^{\beta})$,$0<\beta<1$

$s=\psi^{-1}(\nu)$, $t=\psi^{-1}(x)$,

$t_0 \le s \le t \le \psi^{-1}(\varepsilon^{\beta})$, $\quad t_0 \le \psi^{-1}(\nu) \le \psi^{-1}(x) \le \psi^{-1}(\varepsilon^{\beta})$, $\quad \psi(t_0)=0$,

$0 \le \nu \le x \le \varepsilon^{\beta}$, $\quad |x-\nu| \le \varepsilon^{\beta}$.

Далее $t_0 \le t \le \psi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \Leftrightarrow t_0 \le \psi^{-1}(x) \le \psi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \Leftrightarrow 0 \le x \le \varepsilon^{\beta}$.

Тогда:

$$|f_0(t,\varepsilon)| \le w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)} + w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s) \le$$
$$w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)} + w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})[e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}]\Big|_{s=t_0}^{s=t} = w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta}). \tag{8}$$

б) Пусть $\psi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \le t \le T \Leftrightarrow \varepsilon^{\beta} \le \psi(t) \le \psi(T)$, $\quad m(t) \ge m(s) \quad$ при $t \ge s$.

Тогда

$$\left|\frac{\varepsilon[\vartheta(t)-\vartheta(t_0)]}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\right| \le \frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)} = \frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}ee^{-\frac{\psi(t)}{\varepsilon+m(t)}} =$$
$$2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon^{1-\beta}e\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+m(t)}e^{-\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+m(t)}} \le 2\|\vartheta(t)\|_c e\varepsilon^{1-\beta}\sup_{\nu\ge 0}(\nu e^{-\nu}) = 2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon^{1-\beta}. \tag{9}$$

Оценим вторую член (5):

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\varepsilon\frac{\vartheta(t)-\vartheta(s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)\right| = \left|\int_0^{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)} * \right.$$
$$\left.\frac{\varepsilon[\vartheta(t)-\vartheta(s)]}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s) + \int_{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\frac{\varepsilon[\vartheta(t)-\vartheta(s)]}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)\right|$$
$$\le \frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s) + w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})\frac{\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}$$
$$\Big|_{s=\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{s=t} \le \frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)} + w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta}) \le$$
$$\frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}e^{-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[\int_{t_0}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)-\int_{t_0}^{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)]} + w_{\overline{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta}) \le$$
$$\frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}e^{\frac{m(\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}{\varepsilon+m(t)}}e^{-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[\int_{t_0}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)-\int_{t_0}^{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta})}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)]+w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})} = \tag{10}$$

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

$$\frac{2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}ee^{-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[\psi(t)-\psi(\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^{\beta}))]}+w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})$$
$$=2\|\vartheta(t)\|_c e\varepsilon^{1-\beta}\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+m(t)}e^{-\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+m(t)}}+w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})\leq$$
$$2\|\vartheta(t)\|_c e\varepsilon^{1-\beta}\sup_{\nu\geq 0}(\nu e^{-\nu})+w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta})=2\|\vartheta(t)\|_c\varepsilon^{1-\beta}+w_{\overline{\vartheta}}(\varepsilon^{\beta}).$$

Учитывая (8), (9), (10) из (5) имеем оценку (6).

2) Пусть $\vartheta(t)\in C_{\psi}^{\gamma}[t_0,\ T]$, $0\leq\gamma\leq 1$. Тогда оценим первый член формулы (5):

$$\left|\frac{\varepsilon[\vartheta(t)-\vartheta(t_0)]}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\right|\leq\frac{\varepsilon M[\psi(t)]^{\gamma}}{\varepsilon+m(t)}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)}= \tag{11}$$
$$\frac{M\varepsilon^{1-\gamma}\varepsilon^{\gamma}}{[\varepsilon+m(t)]^{1-\gamma}}[\frac{\psi(t)}{\varepsilon+m(t)}]^{\gamma}ee^{-\frac{\psi(t)}{\varepsilon+m(t)}}\leq MM_1e\varepsilon^{\gamma},\quad t\in[t_0,\ T]$$

Оценим вторую член (5):

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}\frac{\varepsilon[\vartheta(t)-\vartheta(s)]}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)\right| \tag{12}$$
$$\leq\frac{M\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}*$$
$$e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}[m(t)-m(\tau)+\int_s^t K_0(\tau,\tau)\,d\phi(\tau)]^{\gamma}d\phi(s)$$
$$\leq\frac{Me\varepsilon}{[\varepsilon+m(t)]^{1-\gamma}}\int_{t_0}^{t}e^{-[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)]}*$$
$$[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)]^{\gamma}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)$$
$$=Me\varepsilon^{\gamma}\int_{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}^{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}e^{-z}z^{\gamma}dz\leq Me\varepsilon^{\gamma}\int_0^{\infty}e^{-z}z^{\gamma}dz$$

Учитывая оценки (11), (12), из (5) получим оценку (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия а) и б) и

$$P_0(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)+\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}]e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}* \tag{13}$$
$$\frac{1}{\varepsilon+m(\tau)}[K_0(s,\tau)-K_0(\tau,\tau)]d\phi(\tau)$$

Тогда справедлива оценка

$$P_0(t,\tau,\varepsilon)\leq(1+e)l_1(\tau)\ ,\quad(t,\tau)\in G,\quad\varepsilon>0 \tag{14}$$

Доказательство.

Нетрудно показать что $P_0(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}-$ $\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}*[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)]d\phi(s)$.

Отсюда имеем $|P_0(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{l_1(\tau)}{\varepsilon+m(t)}[\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau) + m(t) - m(\tau)]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)} +$
$\frac{l_1(\tau)}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} * e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)}[\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau) + m(t) - m(s)]d\phi(s) \le$
$l_1(\tau)[\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau) + \frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}] * ee^{-[\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau) + \frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}]} +$
$l_1(\tau)\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)\, ee^{-[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)} + \int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)]}[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)} + \int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\phi(\tau)]d\phi(s) \le$
$l_1(\tau)e\sup_{\nu\ge 0}(\nu e^{-\nu}) + l_1(\tau)e\int_0^\infty e^{-z}zdz = l_1(\tau)e(e^{-1}+1);$
$(t,\tau) \in G, \quad \varepsilon > 0.$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3.

Пусть выполняются условия а), б),

$$K_1(t,t,\upsilon) \equiv 0 \text{ при } (t,\vartheta) \in [t_0,T] \times R, \quad H(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))] + \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(s,\tau,\upsilon(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(s,\tau,\upsilon(\tau))]d\phi(s) \tag{15}$$

Тогда справедлива оценка

$$|H(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon))| \le l_2(\tau)e(e^{-1}+1)|\xi(\tau,\varepsilon)|, \quad (t,\tau,\xi) \in G \times R, \ \varepsilon > 0 \tag{16}$$

Доказательство.

Сначала покажем, что

$$H(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + \xi(t,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} - \frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(s,\tau,\upsilon(\tau) + \xi(t,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + K_1(s,\tau,\upsilon(\tau))]d\phi(s). \tag{17}$$

В самом деле

$$\int_\tau^t \frac{1}{\varepsilon+m(t)} \cdot \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))]d\phi(s) = \frac{1}{\varepsilon+m(t)} * [K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))]e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}\Big|_{s=\tau}^{s=t} = \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))] - \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau) + \xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}. \tag{18}$$

Учитывая (18) имеем (17).

Далее из (17) получим

$$|H(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon))| \le \frac{1}{\varepsilon+m(t)}|K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(\tau,\tau,\upsilon(\tau)++\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)) + K_1(\tau,\tau,\upsilon(\tau))|e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} +$$

$$\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}|[K_1(t,\tau,\upsilon(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(s,\tau,\upsilon(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,\upsilon(\tau))+K_1(s,\tau,\upsilon(\tau))]|d\phi(s)$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon+m(t)}l_2(\tau)\left|\int_\tau^t K_0(q,q)d\phi(q)+m(t)-m(\tau)\right||\upsilon(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)-\upsilon(\tau)|e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} *$$

$$l_2(\tau)\left|\int_s^t K_0(q,q)d\phi(q)+m(t)-m(s)\right||\upsilon(\tau))+\xi(\tau,\varepsilon)-\upsilon(\tau)|d\phi(s)$$

$$\le l_2(\tau)\left\{\left[\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}-e^{\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}\right\}$$

$$+\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}\left[\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]d\phi(s)\}\,|\xi(\tau,\varepsilon)|$$

$$= l_2(\tau)e\left[(\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)})e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}\right.$$

$$+\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} *$$

$$\left.(\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)})d\phi(s)\right]|\xi(\tau,\varepsilon)| \le l_2(\tau)e[\sup_{\nu\ge 0}(\nu e^{-\nu})$$

$$+\int_{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}^{\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}*} e^{-\nu_1}\nu_1 d\phi(\nu_1)\quad]|\xi(\tau,\varepsilon)|$$

$$\le l_2(\tau)e(e^{-1}+1)|\xi(\tau,\varepsilon)|.$$

Так как $\sup_{\nu\ge 0}(\nu e^{-\nu})=\frac{1}{e}$, $\int_0^\infty e^{-\nu}\nu d\nu=1$. Лемма 3 доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда

1) если $\psi(t)$ - строго возрастающая функция на $t\in[t_0,T]$, где где $\psi(t)$ -определена с помощью формулы (4), уравнение (1) имеет решение $\upsilon(t)\in C[t_0,T]$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$сходится по норме $C[t_0,T]$ к $\vartheta(t)$.

При этом справедлива оценка

$$\|\vartheta(t,\varepsilon)-\upsilon(t)\|_c \le 4K\|\upsilon(t)\|_c\varepsilon^{1-\beta}+K\varpi_{\bar\upsilon}(\varepsilon^\beta), \tag{19}$$

где β — произвольное число из интервала (0,1).

$\varpi_{\bar\upsilon}(\delta)=\sup_{|x-\nu|\le\delta}\left|\upsilon(\psi^{-1}(x))-\upsilon(\psi^{-1}(\nu))\right|$, $\psi^{-1}(x)$ — обратная функция к функции $\psi(t)$, $K=exp[\,(1+e)\int_{t_0}^t(l_1(s)+l_2(s)d\phi(s)];$

2) если уравнение (1) имеет решение $\upsilon(t) \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, то решение $\vartheta(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$сходится по норме $C[t_0, T]$ к $\upsilon(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|\vartheta(t, \varepsilon) - \upsilon(t)\|_c \leq KMM_3\varepsilon^{\gamma} \tag{20}$$

где $M = \sup\limits_{t,s\in[t_0,\tau]} |\upsilon(t) - \upsilon(s)|/|\phi(t) - \phi(s)|^{\gamma}, M_1 = \sup\limits_{\mu\geq 0}(\mu^{\gamma}e^{-\mu}), M_2 = \int_0^{\infty} e^{-z}z^{\gamma}d\phi(z),$

$M_3 = (M_1 + M_2)e.$

Доказательство.

В уравнении (2) сделаем замену

$$\vartheta(t, \varepsilon) = \upsilon(t) + \xi(t, \varepsilon) \tag{21}$$

где $\upsilon(t)$ — решение уравнения (1). Подставляя (21) в (2) имеем

$$[\varepsilon + m(t)]\xi(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K_0(s, s)\xi(s, \varepsilon)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t}[K_0(t, s) - K_0(s, s)]\xi(s, \varepsilon)d\varphi(s) + \tag{22}$$

$$\int_{t_0}^{t} K_1(t, s, \upsilon(s) + \xi(s, \varepsilon))d\phi(s) = f(t) - \varepsilon\vartheta(t), \xi(t, \varepsilon) +$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}\xi(s, \varepsilon)d\phi(s) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t, s) - K_0(s, s)]\xi(s, \varepsilon)d\phi(s) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t, s,$$

$$-K_1(t, s, \upsilon(s))]d\phi(s) = \frac{-\varepsilon}{\varepsilon + m(t)}[\upsilon(t) - \upsilon(t_0)].$$

Используя резольвенты $R(t, s, \varepsilon) = -\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\phi(s)}$ ядра $[-K_0(s, s)/(\varepsilon + m(t))]$, уравнению (22) сводим к эквивалентному уравнению

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} P_0(t, s, \varepsilon)\xi(s, \varepsilon)d\phi(s) + \int_{t_0}^{t} H(t, s, \xi(s, \varepsilon))d\phi(s) + f_0(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0, T], \tag{23}$$

где $H(t, s, \xi(s, \varepsilon))$ -определена в лемме,

$$P_0(t, \tau, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t, \tau) - K_0(\tau, \tau)] + \int_{\tau}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(s, \tau) - K_0(\tau, \tau)]d\phi(s), \tag{24}$$

$$f_0(t, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon[\upsilon(t) - \upsilon(t_0)]}{\varepsilon + m(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(q,q,)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)} - \int_{t_0}^{t} \frac{K_0(s, s)}{\varepsilon + m(t)}e^{-\int_s^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\phi(q)}\varepsilon\frac{\upsilon(t) - \upsilon(s)}{\varepsilon + m(s)}d\phi(s). \tag{25}$$

Если $\upsilon(t) \in C[t_0, T]$, $\psi(t) = \int_{t_0}^{t} K(s, s)d\phi(s) + m(t)$ -строго возрастающая функция при $t \in [t_0, T]$, то в силу леммы1 из (25) имеем

$$\|f_0(t, \varepsilon)\|_c \leq 4\|\upsilon(t)\|_c\varepsilon^{1-\beta} + \varpi_{\overline{\upsilon}}(\varepsilon^{\beta}), \tag{26}$$

где β — произвольное число из интервала (0,1),

Если $f(t) \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, то в силу леммы1 из (25) имеем

$$\|f_0(t, \varepsilon)\|_c \leq MM_3\varepsilon^{\gamma}. \tag{27}$$

Если выполняются условия а) и б), то в силу леммы 1 из (24) получим

$$|P_0(t,\tau,\varepsilon)| \le (e^{-1}+1)el_1(\tau), \quad (t,\tau)\in G,\ \varepsilon \succ 0\,. \tag{28}$$

Учитывая леммы и оценки (18), из(13) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}[l_1(s)+l_2(s)](1+e^{-1})e|\xi(s,\varepsilon)|d\phi(s)+|f_0(t,\varepsilon)|, \quad t\in[t_0,T]. \tag{29}$$

В силу оценки (26), (27), и обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [9] из (29) вытекает оценки (19) и (20). Теорема доказана.

Следствие 1. Если выполняются условия а), б), $m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)>0 \quad \text{при} \quad t\in(t_0,T),$ $K_1(t,t,v)\equiv 0$ и $\psi(t)$ - строго возрастающая функция при $t\in[t_0,T]$, то решение уравнения (1) единственно в пространстве $C[t_0,T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уравнение (1) имеет два решения $v_1(t)$ *и* $v_2(t)$ *на* $[t_0,T]$, т.е. $\mathrm{m(t)}v_1(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,v_1(s))d\phi(s)=m(t)v_2(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,v_2(s))d\phi(s), \quad t\in[t_0,T]$

Отсюда $m(t)[v_1(t)-v_2(t)]+\int_{t_0}^{t}K_0(t,s)[v_1(s)-v_2(s)]d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}[K_1(t,s,v_1(s))-K_1(t,s,v_2(s))]d\phi(s)=0, m(t)[v_1(t_0)-v_2(t_0)]+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)[v_1(t_0)-v_2(t_0)]d\phi(s)+m(t)[v_1(t)-v_2(t)-(v_1(t_0)-v_2(t_0))]+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)[v_1(s)-v_2(s)-(v_1(t_0)-v_2(t_0))]d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}[K_0(t,s)-K_0(s,s)][v_1(s)-v_2(s)]d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}[K_1(t,s,v_1(s))-K_1(s,s,v(s))-K_1(t,s,v_2(s))+K_1(s,s,v_2(s))]d\phi(s)=0.$

Далее

$$[m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)]|\upsilon_1(t_0)-\upsilon_2(t_0)| \le m(t)|\upsilon_1(t)-\upsilon_2(t)-(\upsilon_1(t_0)-\upsilon_2(t_0))|+ \tag{30}$$

$$\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)|v_1(s)-v_2(s)-v_1(t_0)+v_2(t_0)|d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}|K_0(t,s)-K_0(s,s)||v_1(s)-v_2(s)|d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}|K_1(t,s,v_1(s))-K_1(s,s,v_1(s))-K_1(t,s,v_2(s))+K_1(s,s,v_2(s))|d\phi(s)$$

Из (30) имеем

$$\begin{aligned}[m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\phi(s)]|v_1(t_0)-v_2(t_0)| \\ \le m(t)|v_1(t)-v_2(t)-(v_1(t_0)-v_2(t_0)|+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\phi(s) \\ *\sup_{s\in[t_0,t]}|v_1(s)-v_2(s)-(v_1(t_0)-v_2(t_0)| \\ +\int_{t_0}^{t}l_1(s)[\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)+m(t)-m(s)]|v_1(s)-v_2(s)|d\phi(s) \\ +\int_{t_0}^{t}l_2(s)[\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\phi(\tau)+m(t)-m(s)]|v_1(s)-v_2(s)|d\phi(s), \quad t \\ \in[t_0,T],\end{aligned} \tag{31}$$

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

Деля обе части на $m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\phi(s)$из (31) получим $|v_1(t_0)-v_2(t_0)|\le|v_1(t)-v_2(t)-(v_1(t_0)+v_2(t_0)|+\sup_{s\in[t_0,t]}|v_1(s)-v_2(s)-(v_1(t_0)-v_2(t_0)|+\int_{t_0}^{t}l_1(s)|v_1(s)-v_2(s)|d\phi(s)+\int_{t_0}^{t}l_2(s)\,|v_1(s)-v_2(s)|d\phi(s)$, $t\in[t_0,T]$.

Отсюда переходя к пределу при $t\to t_0$ получим $|v_1(t_0)-v_2(t_0)|=0$ при $t\in[t_0,T]$. Тогда $v_1(t_0)=v_2(t_0)$.

Далее из (19) имеем $\|v_1(t)-v_2(t)\|_c\le\|v_1(t)-\vartheta(t,\varepsilon)\|_c+\|\vartheta(t,\varepsilon)-v_2(t)\|_c\to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Поэтому $v_1(t)=v_2(t)$. при $t\in[t_0,T]$.

Следствие 2. Если выполняются условия а), б) и существует число $t_1\in(t_0,T]$ такое, что $\psi(t)>0$ при всех $t\in(t_0,t_1]$, то решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_\psi^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, *где* $\psi(t)=\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\phi(s)+m(t)$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Были сделаны следующие выводы:

1. Найдены достаточные условия единственности и регуляризации решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода;

2. Доказаны теоремы единственности решений для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

Благодарности: автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Авыт Асанову за ценные советы, предложения и замечания, сделанные им при подготовке данной статьи.

Список литературы:

1. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям, М.: Физматгиз, 1959, 234 с.

2. Цалюк З. Б. Линейные интегральные уравнения Вольтерра. Краснодар, 1980. 70 с.

3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-33.

4. Bughgeim A. L. Volterra Equations and Inverse Problems. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014. 210 p.

5. Denisov A. M. Elements of the theory of inverse problems. VSP, 1999. V. 14.

6. Asanov A. Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. VSP, 1998. V. 11.

7. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады Академии наук. 1989. Т. 309. №5. С. 1052-1055.

8. Иманалиев М. И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415. №1. С. 14-17.

9. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. №6. С. 734-737.

10. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. №5. С. 592-596.

11. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait Journal of Science. 2017. V. 44. №1. P. 17-28.

12. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. №4. С. 405-409. https://doi.org/10.7868/S0869565217160010

13. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №3. С. 387-387. https://doi.org/10.1134/S037406411803010X

14. Асанов А. Производная функции по возрастающейфункции // Manas Journal of Natural Sciences. 2001. Т. 1. №1. С. 18-67.

15. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго и первого рода // Manas Journal of Natural Sciences. 2002. Т. 1. №2. С. 79-95.

16. Асанов А., Беделова Н. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода // Вестник КазНПУ им. Абая. 2014. №4. С. 8-13.

17. Bedelova N. The Choice of the Regularization Parameter for Solving Linear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind // Institute of Scientific Communications Conference. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 321-328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47945-9_36

References:

1. Mixlin, S. G. (1959). Lekcii po linejny`m integral`ny`m uravneniyam, Moscow. (in Russian).

2. Czalyuk, Z. B. (1980). Linejny`e integral`ny`e uravneniya Vol`terra. Krasnodar. (in Russian).

3. Lavrent`ev, M. M. (1959). Ob integral`ny`x uravneniyax pervogo roda. *Doklady` AN SSSR, 127*(1), 31-33. (in Russian).

4. Bughgeim, A. L. (2014). Volterra Equations and Inverse Problems. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

5. Denisov, A. M. (1999). Elements of the theory of inverse problems. *VSP, 14.*

6. Asanov, A. (1998). *Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind* (Vol. 11). VSP.

7. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (1989). O resheniyax sistem nelinejny`x integral`ny`x uravnenij Vol`terra pervogo roda. In *Doklady` Akademii nauk, 309*(5), 1052-1055). (in Russian).

8. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2007). Regulyarizaciya i edinstvennost` reshenij sistem nelinejny`x integral`ny`x uravnenij Vol`terra tret`ego roda. In *Doklady` Akademii nauk, 415*(1), 14-17. (in Russian).

9. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2010). O resheniyax sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda. In *Doklady` Akademii nauk, 430*(6), 734-737. (in Russian).

10. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2011). Ob odnom klasse sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda. In *Doklady` Akademii nauk, 437*(5), 592-596. (in Russian).

11. Asanov, A., Matanova, K., & Asanov, R. (2017). A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. *Kuwait Journal of Science*, *44*(1).

12. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2017). O resheniyax sistem linejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda s mnogotochechny`mi osobennostyami. In *Doklady` Akademii nauk, 474*(4), 405-409. (in Russian). https://doi.org/10.7868/S0869565217160010

13. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2018). Ob odnom klasse sistem linejny`x i nelinejny`x integral`ny`x uravnenij Fredgol`ma tret`ego roda s mnogotochechny`mi osobennostyami.

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

Differencial`ny`e uravneniya, 54(3), 387-387. (in Russian). https://doi.org/10.1134/S037406411803010X

14. Asanov, A. (2001). Proizvodnaya funkcii po vozrastayushhejfunkcii. *Manas Journal of Natural Sciences, 1*(1), 18-67. (in Russian).

15. Asanov, A. (2002). Integral`ny`e uravneniya Vol`terra-Stil`t`esa vtorogo i pervogo roda. *Manas Journal of Natural Sciences, 1*(2), 79-95. (in Russian).

16. Asanov, A., & Bedelova, N. (2014). Odin klass linejny`x integral`ny`x uravnenij Vol`terra-Stil`t`esa tret`ego roda. *Vestnik KazNPU im. Abaya,-Almaty`,* (4), 8-13. (in Russian).

17. Bedelova, N. (2019, December). The Choice of the Regularization Parameter for Solving Linear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind. In *Institute of Scientific Communications Conference* (pp. 321-328). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47945-9_36

Поступила в редакцию 25.03.2026 г.

Принята к публикации 01.04.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Беделова Н. С. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №6. С. 28-39. https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/03

Cite as (APA):

Bedelova, N. (2026). On a Class of Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equations of the Third Kind. *Bulletin of Science and Practice, 12*(6), 28-39. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/03