УДК 512.86 https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/02

КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ МЕТОДОМ ТРАНСФОРМАЦИЙ

*©**Сатаров Ж. С.**, ORCID: 0009-0000-4129-8665, SPIN-код: 4799-8291, д-р физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, Satarov1949@mail.ru*
*©**Жолдошова Ч. Б.**, ORCID: 0009-0003-1343-0755, SPIN-код: 7604-8761, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, Chebire86@mail.ru*
*©**Сапарова С. А.**, ORCID: 0009-0009-9723-2222, SPIN-код: 9555-6099, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, samash-85@mail.ru*

COMBINATORIAL DESCRIPTION OF A SIGN-VARIABLE GROUP USING THE TRANSFORMATION METHOD

*©**Satarov Zh.**, ORCID: 0009-0000-4129-8665 SPIN-code: 4799-8291, Dr. habil., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, Satarov1949@mail.ru*
*©**Zholdoshova Ch.**, ORCID: 0009-0003-1343-0755, SPIN-code: 7604-8761, Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, Chebire86@mail.ru*
*©**Saparova S.**, ORCID: 0009-0009-9723-2222, SPIN-code: 9555-6099, Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, samash-85@mail.ru*

Аннотация. Представление групп через их порождающие элементы и определяющие соотношения составляет один из главных вопросов в комбинаторной теории групп. В указанном направлении к настоящему времени достигнуто очень многое и изобретено множество различных методов. Одним из таких способов является метод трансформации букв. Суть этого метода состоит в преобразовании всякого слова выбранного (порождающего) алфавита к его стандартному виду при применении только заранее определенных «определяющих» соотношений. Авторами он не раз был успешно применен при комбинаторном описании некоторых классов линейных групп. Из этих исследований нетрудно заметить пригодность указанного метода при решении подобных вопросов и для других классов (не обязательно линейных) групп. В этой работе предлагается решение вопроса о выявлении порождающих и определяющих соотношений для знакопеременной группы An, n≥3, основанное на применении отмеченного метода трансформации букв. При доказательстве основного результата работы существенное значение имеет теорема о стандартном строении, гласящая, что всякий элемент группы An можно представить, причем единственным способом, в стандартном виде. Упомянутое же приведение слов порождающего An алфавита к их стандартным формам (при помощи определяющих соотношений 1–7) осуществляется с опорой на так называемую трансформационную теорему. Суть этой теоремы состоит в удалении букв x из выражений вида f_i x. В качестве порождающих группу An элементов нами взяты ее самые простейшие элементы — тройные циклы. Доказательства основной и вспомогательных теорем проводятся комбинаторными рассуждениями.

Abstract. The representation of groups through their generating elements and defining relations is one of the main issues in the combinatorial theory of groups. In this area, much progress has been made and various methods have been developed. One such method is the transformation of letters.

This method involves transforming any word in a chosen (generating) alphabet into its standard form by applying predefined defining relations. The authors have successfully applied this method to the combinatorial description of certain classes of linear groups. From these studies, it is easy to see that this method can also be used to solve similar problems for other classes of groups (not necessarily linear). In this paper, we use this method to solve the problem of finding the generating elements and defining relations for the alternating group An, n ≥ 3. The reduction of the words of the generating An alphabet to their standard forms (using the defining relations 1-7) is based on the so-called transformation theorem. The essence of this theorem is the removal of the letters x from expressions of the form f i x. As the generating elements for the group An, we have taken the simplest of its elements: triple cycles. The proofs of the main and auxiliary theorems are carried out by combinatorial reasoning.

Ключевые слова: знакопеременная группа, приведенные циклы, подвижное подмножество, подстановки, стандартные формы, трансформационные преобразования.

Keywords: sign-variable group, reduced cycles, mobile subset, substitutions, standard forms, transformational transformations.

Представление группы с позиции образующих и соотношений является одним из эффективных способов их изучения. В указанном направлении на сегодня имеется уже большое количество исследований и методов. Одним из таких инструментов является комбинаторный метод трансформации букв. Суть этого аппарата состоит из преобразования слов выбранного порождающего алфавита к их стандартным формам, применяя при этом найденное предварительно «определяющие» серии соотношений. Метод этот первоначально был задуман как инструмент для описания с комбинаторной позиции некоторых классов линейных групп. Он был успешно применен, например, при получении результа и его содержание подробно разъяснено там же. Как хорошо видно из этого описания, он точно таким же образом может быть применен и к другим классам (не обязательно линейных) групп, если только подвергнуть их названному методу надлежащим образом [1].

Одну из классических серий групп составляют симметрические группы S_n и различные их классические подгруппы. Значение этих групп в алгебре колоссально и интерес к ним сохраняется по сей день. В этой работе мы дадим комбинаторное описание знакопеременной группы A_n степени $n \geq 3$, основанное на применении упомянутого только что метода трансформации букв. Отметим, что группа S_n и всякие ее подгруппы с различных комбинаторных позиций были рассмотрены многими авторами и до этого [2-6].

Метод в работе использует стандартные формы элементов группы An. Пусть $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ и для $\alpha \in A_n$ $I(\alpha) = \{t \in I_n : t\alpha \neq t\}$означает подвижное подмножество в I_n этой подстановки α. Из этого соглашения видно, что подстановки из A_n в работе будут действовать на символы из I_n справа. Ясно, что здесь для единичной подстановки $\alpha = e$ $I(\alpha) = \emptyset$. Покажем, что для всех неединичных $e \neq \alpha \in A_n$имеют место неравенства

$$|I(\alpha)| \geq 3. \qquad (\geq)$$

Действительно, как видно из импликаций $t\alpha \neq t \rightarrow (t\alpha)\alpha \neq t\alpha \rightarrow t\alpha \in I(\alpha)$, множество $I(\alpha)$ вместе с каждым своим элементом t содержит также его образ $t\alpha$. Таким образом, множество $I(\alpha)$ содержит не менее двух элементов. Оно состоять только из двух элементов также не может, ибо в противном случае эта α переставляя только два элемента t и $t\alpha$,

Т. 12. №6 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/127

сказалось бы подстановкой нечетной, что противоречит с $\alpha \in A_n$. Таким образом, для неединичных α из A_n неравенства ($\geq$) действительно будут иметь место.

Очевидно, всякий неединичный тройной цикл α можно представить в виде:

$$\alpha = (ipq), \quad i < p, q, \qquad (i)$$

причем единственным образом. Представление (i) мы условимся называть приведенной формой подстановки α, а символ же i —ее ведущим элементом. Далее, для номеров $i, 1 \leq i \leq n-2$, формы ступени i мы в этой работе определим либо как $f_i = e$, либо же как приведенные циклы $f_i = (ipq)$. В качестве же стандартных форм элементов из A_n здесь мы объявляям всевозможные комбинации вида

$$f_{n-2} \dots f_2 f_1. \qquad (sf)$$

Стандартное строение в группе A_n описывается следующим образом.

Теорема 1. Всякая подстановка αиз A_n представляется в стандартном виде (sf), причем такое представление для единичной подстановки $\alpha = e$ будет единственным.

Доказательство. Существование разложения. Для единичной $\alpha = e$ очевидным образом можно положить $f_{n-2} = \dots = f_2 = f_1 = e$. Поэтому всюду далее будем считать α неединичной. Сначала покажем, что эту α можно представить в виде произведения:

$$\alpha = (p **) \dots (q **)(i **) \qquad (*)$$

конечного числа каких-то приведенных циклов с ведущими элементыми $p > \dots > q > i$. Установим этот факт используя индукцию по числу $|I(\alpha)|$. Если $|I(\alpha)| = 3$, то α будет просто тройным циклом и выводя на первое место наименьший из передвигающихся символов i, здесь мы будем иметь $\alpha = (ikr),\ i < k, r,$ т.е. разложение (*) (с одним числом сомножителей) имеет место.

Пусть теперь $|I(\alpha)| > 3$и i —наименьший номер из $I(\alpha)$. Взяв (произвольным образом!) элемент r из разности $I(\alpha)\setminus\{i, k\}$, где $k = i\alpha$, составим произведение $\alpha(ikr)^{-1} = \beta$. Очевидно, здесь β оставляет символ i неподвижно, т.е. $I(\beta) \subseteq I(\alpha)\setminus\{i\}$. А это означает, что $|I(\beta)| < |I(\alpha)|$, следовательно, по предположению индукции подстановка β будет допускать разложение$\beta = (p **) \dots (q **)$, где все сомножители – приведенные и для них $p > \dots > q$. Подставляя теперь вместо β (в ее введении) это разложение, мы тем самым приходим к требуемому представлению (*).

Единственность для e. Допустам, что кроме тривиального $e \dots ee = e$ существует для e еще одно разложение:

$$e = g_{n-2} \dots g_2 g_1. \qquad (=)$$

Но так может быть, очевидно, только тогда, когда $g_i = (ikr) \neq e$ и $g_{i-1} = \dots = g_1 = e$ при некотором i. А последнее иметь место не может, поскольку правая часть в (=) переводит символ i в κ в то время, когда левая часть — нет. Полученное противоречие показывает на правильность и второго утверждения теоремы и, тем самым, наше доказательство завершено.

Замечание. Что касается единственности разложения (*) в общем виде (т.е. для любой подстановки α из A_n), то она имеет место при $n = 3$ очевидным образом. При же $n > 3$, ввиду произвольности выбора компоненты r из $I(\alpha)\setminus\{i, k\}$, такая единственность для всех α уже не имеет место.

Порождаемость группы A_n тройными циклами (ikj), $\mathrm{i, k, j} \in \mathrm{I_n}$, была известиа еще задолго до этого [8]. Доказанная же теорема 1 не только обобщает этот факт, она здесь используется и для других наших целей. Ниже для представления группы A_n изберем именно этот (естественный) порождающий алфавит:

$$(\mathrm{rsl}), \mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{l} \in \mathrm{I_n} \qquad (g)$$

(здесь $r, s, l -$ попарно различны). В алфавите (g) имеют место следующие соотношения группы A_n:

1. $(\mathrm{rsl}) = (\mathrm{ipq})$, где $\mathrm{i} = \min\{\mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{l}\}$
2. $(\mathrm{ipq})^2 = (\mathrm{iqp})$, $\mathrm{i} < \mathrm{p}, \mathrm{q}$;
3. $(\mathrm{ipq})^3 = \mathrm{e}$, $\mathrm{i} < \mathrm{p}, \mathrm{q}$;
4. $(\mathrm{rpq})(\mathrm{ips}) = (\mathrm{spq})(\mathrm{isp})$, $\mathrm{q} \neq \mathrm{s}$;
5. $(\mathrm{ipq})(\mathrm{iks}) = (\mathrm{qks})(\mathrm{ipq})$, $\{\mathrm{p}, \mathrm{q}\} \cap \{\mathrm{k}, \mathrm{s}\} = \emptyset$;
6. $(\mathrm{ipq})(\mathrm{pqs}) = (\mathrm{qsp})(\mathrm{ips})$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{i}$;
7. $(\mathrm{ipq})(\mathrm{krs}) = (\mathrm{krs})(\mathrm{ipq})$, $\mathrm{i} < \mathrm{p}, \mathrm{q}$; $\mathrm{k} < \mathrm{r}, \mathrm{s}$; $\{\mathrm{p}, \mathrm{q}\} \cap \{\mathrm{k}, \mathrm{r}, \mathrm{s}\} = \emptyset$.

Правильность этих соотношений может быть проверена непосредственно. Останавливаться на этом не будем. Суть нашего метода, как уже упомянулось выше, состоит из преобразования слов алфавита (g) к их стандартным формам (не важно каким!), используя при этом соотношения только из 1-7. Вводим сперва для номеров $i, 1 \leq i \leq n-2$, и слов алфавита (g) w, v бинарные отношения $\xrightarrow{i}$, положив $w \xrightarrow{i} v$ тогда и только тогда, когда они связаны соотношением $w = XV$, где $X -$ либо пустое слово, либо же некоторое слово, состоящее только из букв (pqr), для которых $p, q, r > i$. Введенные отношения очевидным образом являются рефлексивными и транзитивными. Наши дальнейшие рассуждения основываются на следующую теорему.

Теорема 2 (о трансформации букв). Пусть $f_i -$некоторая форма ступени i, $x = (krs) -$ тройной цикл с номерами $k, r, s \geq i$. Тогда применяя соотношения 1-7, можно выполнить преобразование $V = f_i x \xrightarrow{i} g_i$, где $g_i -$также некоторая форма ступени i.

Доказательство. Ниже наши рассуждения используют следующие множества $A = \{p, q\}$, $B = \{r, s\}$ и $C = \{k, r, s\}$. Если это необходимо, то применяя соотношения 1 букву x мы всегда можем считать находящейся в ее приведенной форме. Далее, ниже ради краткости изложения под записью $W \underset{t}{=} V$ соглашаемся понимать преобразование слова W к V, полученное применением соотношения с номером t. Доказательство является комбинаторным и проводится в два этапа.

Этап *I*. $k = i$. В этом случае рассматриваемое слово имеет вид $V = f_i(irs)$ Если здесь $f_i = e$, то (ввиду рефлексивности $\xrightarrow{i}$) будем иметь сразу $V = e(irs) = (irs) \xrightarrow{i} (irs) = g_i$

Поэтому всюду далее будем считать, что $\mathrm{f_i} = (\mathrm{ipq}) \neq \mathrm{e}$. При необходимости применяя 1, букву (krs) также можно считать приведенной. В рассматриваемам случае возможны следующие подслучаи.

a) $A = B$ (т.е. $|A \cap B| = 2$). Очевидно, здесь имеем либо $\mathrm{V} = (\mathrm{ipq})^2 \underset{2}{=} (\mathrm{iqp}) \xrightarrow{\mathrm{i}} (\mathrm{iqp}) = \mathrm{g_i}$, либо же $\mathrm{V} = (\mathrm{ipq})(\mathrm{iqp}) \underset{1}{=} (\mathrm{iqp})^3 \underset{3}{=} \mathrm{e} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{e} = \mathrm{g_i}$.

b) A и B пересекаются по одному элементу. Этот подслучай дает нам следующие результаты: $V = (ipq)(ips) \underset{4}{=} (spq)(isp) \xrightarrow{i} (isp) = g_i$;

$V = (\mathrm{ipq})(\mathrm{irp}) \underset{2}{=} [(\mathrm{ipq})(\mathrm{ipr})](\mathrm{ipr}) \underset{4}{=} (\mathrm{rpq})(\mathrm{irp})(\mathrm{ipr}) \underset{2}{=} (\mathrm{rpq})(\mathrm{irp})^3 \underset{3}{=} (\mathrm{rpq})\mathrm{e} = (\mathrm{rpq}) \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{e} = \mathrm{g_i}$; $\mathrm{V} = (\mathrm{ipq})(\mathrm{iqs}) \underset{1}{=} (\mathrm{qip})(\mathrm{iqs}) \underset{2}{=} (\mathrm{qip})(\mathrm{isq})^2 \underset{1}{=} [(\mathrm{qip})(\mathrm{qis})](\mathrm{isq}) \underset{4,1}{=}$

$$\mathrm{(sip)(qsi)(isq)} \underset{1}{=} \mathrm{(ips)(iqs)(isq)} = \mathrm{(ips)(isq)^3} \underset{2}{=} \mathrm{(ips)e} \underset{3}{=} \mathrm{(ips)} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{(ips)} = \mathrm{g_i},$$

Используя последовательно только что выведенные (из 1-4) соотношения $\mathrm{(ipq)(irp)} = \mathrm{(rpq)}$ и $\mathrm{(ipq)(iqs)} = \mathrm{(ips)}$, имеем также $\mathrm{V} = \mathrm{(ipq)(ikq)} \underset{2}{=} \mathrm{(ipq)[(ikp)(ipk)](ikq)} = \mathrm{[(ipq)(ikp)][(ipk)(ikq)]} = \mathrm{(kpq)(ipq)} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{(ipq)} = \mathrm{g_i}$.

c) $A \cap B = \emptyset$. Здесь мы имеем преобразования $\mathrm{V} = \mathrm{(ipq)(irs)} \underset{5}{=} \mathrm{(krs)(ipq)} \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathrm{(ipq)} = \mathrm{g_i}$.

Этап II. $k > i$. Здесь рассматриваемое слово примет вид $V = f_i(krs)$. При $f_i = e$ и здесь мы имеем $V = e(krs) \xrightarrow{i} e = g_i$, т.е. к требуемому виду приходим тривиальным образом. Считая $f_i \neq e$, далее мы остановимся на оставшихся (возможных) случаях. Разберем сначала случай, когда A *и* C пересекаются по двум элементам (т.е. $A \subset C$).

a) $A = \{k, r\}$. Если здесь $p = k$ и $q = r$, то имеем $V = (ipq)pqs) \underset{6}{=} (qsp)(iqs) \xrightarrow{i} (iqs) = g_i$.

Если же $p = r$, $q = k$, то к требуемому виду приходим как $V = (ipq)qps) \underset{1}{=} (pqi)(psq) \underset{2}{=} [(pqi)(pqs)](pqs) \underset{4}{=} (sqi)(psq)(pqs) \underset{2}{=} (sqi)(psq)^3 = (sqi)e = (isq) \xrightarrow{i} (isq) = g_i$.

b) $A = \{k, s\}$. Если при этом $p = k$, $q = s$, то имеем преобразования $V = (ipq)(prq) \underset{1}{=} (pqi)(rqp) \underset{2}{=} (pqi)(rpq)^2 \underset{1}{=} [(pqi)(pqr)](rpq) \underset{4,1}{=}$

$$(rqi)(prq)(pqr) \underset{1,2}{=} (irq)(prq)^3 \underset{3}{=} (irq)e \xrightarrow{i} (irq) = g_i.$$

При $p = s, q = k$ требуемую форму получаем так $V = (ipq)qrp) \underset{1}{=} (ipq)(pqr) \underset{6}{=} (qrp)(iqr) \xrightarrow{i} (iqr) = g_i$.

c) $A = \{r, s\}$. Если здесь $p = r$, $q = s$, то можно выполнить преобразования $V = (ipq)(kpq) \underset{1}{=} (ipq)(pqk) \underset{6}{=} (qkp)(iqk) \xrightarrow{i} (iqk) = g_i$.

Если же $p = s$, $q = r$, то мы имеем $V = (ipq)(kqp) \underset{2}{=} (ipq)(kpq)^2 = (ipq)(kpq)(kpq) \underset{1}{=} [(ipq)(pqk)](kpq) \underset{6}{=} (qkp)(iqk)(kpq) \underset{1}{=} (qkp)[(iqk)(qkp)] \underset{6}{=}$

$$(qkp)(kpq()(ikp) \xrightarrow{i} (ikp) = g_i.$$

Переходим теперь к случаям, когда A *и* C пересекаются по одному элементу. Разберем сначала случай, когда $A \cap C = \{p\}$.

a) Если $k = p$, то мы имеем преобразования

$$V = (ipq)(prs) \underset{1}{=} (pqi)(prs) \underset{5}{=} (irs)(pqi) \underset{1}{=} (irs)(ipq) \underset{5}{=} (spq)(irs) \xrightarrow{i} (irs) = g_i.$$

b) Если же $r = p$, то требуемую форму мы получаем так

$$V = (ipq)(rps) \underset{1}{=} (pqi)(psr) \underset{5}{=} (isr)(pqi) \underset{1}{=} (isr)(ipq) \underset{5}{=} (rpq)(isr) \xrightarrow{i} (isr) = g_i.$$

c) При $s = p$ мы имеем

$$V = (ipq)(krp) \underset{1}{=} (pqi)(pkr) \underset{5}{=} (ikr)(pqi) \underset{1}{=} (ikr)(ipq) \underset{5}{=} (rpq)(ikr) \xrightarrow{i} (ikr) = g_i.$$

Переходим теперь к случаю $A \cap C = \{q\}$.

a) Если здесь $k = q$, то $V =$
$(ipq)(qrs) \underset{1}{=} (qip)(qrs) \underset{5}{=} (prs)(qip) \underset{1}{=} (prs)(ipq) \xrightarrow{i} (ipq) = g_i$.

b) Если же $r = q$, то мы имеем

$$V = (ipq)(kqs) \underset{1}{=} (qip)(qsk) \underset{5}{=} (psk)(qip) \underset{1}{=} (psk)(ipq) \xrightarrow{i} (ipq) = g_i.$$

c) При $s = q$ аналогичным образом получаем

$$V = (ipq)(krq) \underset{1}{=} (qip)(qkr) \underset{5}{=} (pkr)(qip) \underset{1}{=} (pkr)(ipq) \xrightarrow{i} (ipq) = g_i.$$

Нам осталось разобрать случай, когда $A \cap C = \emptyset$. Здесь мы применяя соотношения перестановочности 7, требуемую форму получаем так

$$V = (ipq)(krs) = (krs)(ipq) \xrightarrow{i} (ipq) = g_i.$$

Таким образом, во всех имеющихся случаях преобразование $V = f_i x \xrightarrow{i} g_i$ действительно выполняется, и тем самом, теорема 2 доказана полностью.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать главное утверждение нашей работы.

Теорема 3. (о комбинаторном описании группы A_n). Знапопеременная группа A_n, $n \geq 3$, в порождающих (g) представляется соотношениями 1-7.

Доказательство этой теоремы также проводится в два этапа.

Этап *I*. Здесь покажем приводимость всякого непустого слова W алфавита (g) к одной из его стандартных форм $S(W)$, применяя при этом только соотношения 1-7. Не теряя общности это слово можно считать представленным в виде:

$$W \xrightarrow{1} f_1 X, \tag{X}$$

где f_1 —некоторая форма ступени 1 и X —соответсвующее ей дополнение. Пусть $X = xY$, т.е. x —первая буква дополнения X. Применяя x стыку $V = f_1 x$ трансформационную теорему 2 (т.е. при помощи соотношений 1-7), мы имеем $W \xrightarrow{1} (f_1 x)Y \xrightarrow{1} g_1 Y$, т.е. его (ввиду транзитивности $\xrightarrow{1}$) можно представить в том же виде (X):

$$W \xrightarrow{1} f_1 Y, \tag{Y}$$

но уже с упороченной длиной дополнения. Очевидно, в записи (Y) f_1 —уже другая форма ступени 1. Повторяя описанный процесс сокращения дополнений, мы через конечное число шагов приходим к записи вида:

$$W \xrightarrow{1} f_1. \tag{\emptyset}$$

Но последнее согласно определению отношения $\xrightarrow{1}$ означает равенство

$$W = Z f_1, \tag{Z}$$

где f_1 — (по-прежнему) некоторая форма ступени 1, а Z же —какое-то слово алфавита (g), состоящее только из циклов (rsk), для которых $r, s, k \geq 2$. Теперь мы аналогичным образом выделяя из Z форму f_2 (степени 2), для слова W будем иметь представление $W = T f_2 f_1$, где T —некоторое слово, образованное только из циклов (rsk) с компонентами $r, s, n \geq 3$, и т.д. Описанный процесс вытягиваний форм f_i на $(n-2)$ шаге приводит нас к разложению $W = R f_{n-2} \dots f_2 f_1$.

Поскольку в последней записи дополнение R не сможет содержать тройные циклы (rsk), для которых $min\{r,s,k\} \leq n-2$, оно обязано быть пустым. Таким образом, действительно пришли к одному из стандартных разложений рассматриваемого слова $S(W) = f_{n-2}... f_2 f_1$.

Этап II. Пусть теперь $W = e$ −произвольное соотношение группы A_n (в алфавите (g), разумеется, с непустой левой частью). Применяя к слову W результат установленного только что этапа I, заменим заданное соотношение с его “стандартной” формой$f_{n-2}... f_2 f_1 =$ e.

Но согласно теореме 1 последнее равенство возможно только тогда, когда все формы f_t − единичные. А это уже означает, что (заданное) соотношение $W = e$есть следствие от серий 1-7. Теорема 3 доказана в полном объеме. В заключение отметим, что при $n = 3$ серии 4-7, а при $n = 4$ серии 5,7, при же $n = 5$ серия 7 являются неадекватными (т.е. они там не укладываются). Поэтому при указанных значениях n их из формулировки теоремы следует считать опущенными.

Вывод

Продемонстрированный метод трансформации может быть применен и к ряду других (не обязательно линейных) групп при их комбинаторном описании.

Список литературы:

1. Сатаров Ж. С. Определяющие соотношения специальной унитарной группы над квадратичным расширением упорядоченного евклидова поля // Математический сборник. 1985. Т. 126. №3. С. 426-430. https://doi.org/10.1070/SM1986v054n02ABEH002978

2. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Д. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука. 1980. 240 с.

3. Moore E. H. Concerning the Abstract Groups of Order k! and ½k! Holohedrically Isomorphic with the Symmetric and the Alternating Substitution-Groups on k Letters // Proceedings of the London Mathematical Society. 1896. V. 1. №1. P. 357-367. https://doi.org/10.1112/plms/s1-28.1.357

4. Karmichael R. D. Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups // Quart. J. Math. 1923. V. 49. P. 226-270.

5. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Annals of Mathematics. 1934. V. 35. №3. P. 588-621. https://doi.org/10.2307/1968753

6. Coxeter H. S. M. The complete enumeration of finite groups of the form R i 2=(R i R j) kij= 1 // Journal of the London Mathematical Society. 1935. V. 1. №1. P. 21-25. http://www.jstor.org/stable/1968753

7. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972. 239 с.

References:

1. Satarov, Zh. S. (1985). Opredelyayushhie sootnosheniya special`noj unitarnoj gruppy` nad kvadratichny`m rasshireniem uporyadochennogo evklidova polya. *Matematicheskij sbornik, 126*(3), 426-430. (in Russian). https://doi.org/10.1070/SM1986v054n02ABEH002978

2. Kokseter, G. S. M., & Mozer, U. O. D. (1980). Porozhdayushhie e`lementy` i opredelyayushhie sootnosheniya diskretny`x grupp. Moscow. (in Russian). https://doi.org/10.1112/plms/s1-28.1.357

3. Moore, E. H. (1896). Concerning the Abstract Groups of Order k! and ½k! Holohedrically Isomorphic with the Symmetric and the Alternating Substitution-Groups on k Letters. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *1*(1), 357-367.

4. Karmichael, R. D. (1923). Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups. *Quart. J. Math*, *49*, 226-270.

5. Coxeter, H. S. (1934). Discrete groups generated by reflections. *Annals of Mathematics*, *35*(3), 588-621. https://doi.org/10.2307/1968753

6. Coxeter, H. S. (1935). The complete enumeration of finite groups of the form R i 2=(R i R j) kij= 1. *Journal of the London Mathematical Society*, *1*(1), 21-25. http://www.jstor.org/stable/1968753

7. Kargapolov, M. I., & Merzlyakov, Yu. I. (1972). Osnovy` teorii grupp. Moscow. (in Russian).

Поступила в редакцию 18.03.2026 г.

Принята к публикации 26.03.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Сатаров Ж. С., Жолдошова Ч. Б., Сапарова С. А. Комбинаторное описание знакопеременной группы методом трансформаций // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №6. С. 20-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/02

Cite as (APA):

Satarov, Zh., Zholdoshova, Ch., & Saparova, S. (2026). Combinatorial Description of a Sign-Variable Group using the Transformation Method. *Bulletin of Science and Practice, 12*(6), 20-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/02