ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ / NATURAL SCIENCES

УДК 517.968 https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/01

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*©**Аширбаева А. Ж**., ORCID: 0000-0001-7706-0608, SPIN-код: 8257-0830, д-р физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, aijarkyn.osh@mail.ru*
*©**Бекиева М. Р**., Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, mbekieva@oshsu.kg*
*©**Зулпукаров Ж. А**., ORCID: 0009-0002-9795-6369, SPIN-код: 6028-6306, канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, zulpukarov66@mail.ru*

SOLVING A SYSTEM OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SPATIAL VARIABLE DERIVATIVE

*©**Ashirbaeva A**., ORCID: 0000-0001-7706-0608, SPIN-code: 8257-0830, Dr. habil., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, aijarkyn.osh@mail.ru*
*©**Bekieva M**.,Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, mbekieva@oshsu.kg*
*©**Zulpukarov Zh**., ORCID: 0009-0002-9795-6369, SPIN-code: 6028-6306, Ph.D., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, zulpukarov66@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена система дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Правая часть системы содержит производную неизвестной функции по пространственной переменной первого порядка и система является нелинейной по отношению к неизвестной функции. Коэффициент производной неизвестной функции по пространственной переменной первого порядка зависит от неизвестной функции. В настоящее время одной из актуальных задач является распространение метода дополнительного аргумента на систему дифференциальных уравнений с частными производными более высокого порядка. Ранее применялась к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В работе задача Коши для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка сводится к системе интегральных уравнений. В приведенной системе интегральных уравнений число неизвестных равно шести, и изучается существование и единственность решения рассматриваемой интегральной системы. Она обеспечивает существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Применятся принцип сжатых отображений. Используется несколько обозначений. Основной целью метода дополнительного аргумента является приведение исходной задачи к системе интегральных уравнений. Исследованы дифференциальные уравнения в частных производных более высокого порядка, а также интегро-дифференциальные уравнения. В отличие от метода характеристик, нет необходимости приводить систему к канонической форме. Полученные результаты можно распространить на случай, когда уравнения системы содержат частные производные первого порядка по времени.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Abstract. In this article, a system of second-order partial differential equations is considered. The right-hand side of the system contains the first-order spatial derivative of an unknown function, and the system is nonlinear with respect to the unknown function. The coefficient of this first-order derivative depends on the unknown function itself. Currently, one of the relevant problems is the extension of the method of an additional argument to systems of higher-order partial differential equations. Previously, this method was applied to systems of first-order partial differential equations. In this work, the Cauchy problem for the considered second-order system is reduced to a system of integral equations. The resulting integral system contains six unknown functions. The existence and uniqueness of the solution of this system are studied, which ensures the existence and uniqueness of the solution to the original system of second-order partial differential equations. The contraction mapping principle is applied to the system of integral equations. Several auxiliary notations are introduced in the reduction process. The main purpose of the method of an additional argument is to transform the original problem into a system of integral equations. Using this method, higher-order partial differential equations as well as integro-differential equations have been investigated. It should be noted that, unlike the method of characteristics, this approach does not require reducing the system to canonical form. The results obtained in this work can also be extended to the case where the system contains first-order partial derivatives in time.

Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, система, частные производные, второй порядок, интегральные уравнения, сжатое отображение.

Keywords: additional argument method, system, partial derivatives, second order, integral equations, compressed mapping

Рассматривается использование метода дополнительного аргумента, предлагается следующая система:

$$\frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2} = a_j{}^2(t,x)\frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + c_j(t,x,u_j(t,x))\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x} + F_j(t,\mathrm{x},u_1,u_2), \tag{1}$$
$$i = 1,2, \qquad (t,x) \in Q_2(T) = [0,T] \times R.$$

Функции в (1) $\mathrm{a_j(t,x)} \neq 0, \mathrm{j} = 1,2$ и заданы начальные условия:

$$\left.\frac{\partial^k u_j}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \phi_k^j(x), \quad k = 0,1, \quad j = 1,2, \quad x \in R. \tag{2}$$

Цель состоит в том, чтобы привести задачу Коши для рассматриваемой системы к интегральной системе с последующим доказательством существования и единственности решения интегральной системы. Для достижения этой цели надо ввести несколько обозначений. Будем использовать следующие обозначения:

$$g_i^j(t,x,w) = \frac{1}{a_j(t,x)}[c_j(t,x,w) + (-1)^i(a_{jt}(t,x) + (-1)^{i+1}a_j(t,x)a_{jx}(t,x)], \tag{3}$$
$$i,j = 1,2,$$

$$r_i^j(t,x,w) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i^j(t,x,w)}{\partial w}, \quad i,j = 1,2. \tag{4}$$

Определения пространств функций подробно описаны в работах А. Ж. Аширбаевой, Э. А. Мамазияевой, М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко [1-2]. Поэтому не будем подробно

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

останавливаться на определения пространствах функций, используемых в работе. Рассмотрим следующие вспомогательные интегральные уравнения:

$$p_i^j(s,t,x) = x + (-1)^i \int_s^t \quad a_j(\tau, p_i^j(\tau,t,x))d\tau,\ i,j = 1{,}2,\ 0 \le s \le t \le T. \tag{5}$$

Из теории интегральных уравнений нам известны, что с функцией $a_j(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $j = 1{,}2$ интегральные уравнения типа (5) имеют единственные решения [3-4]. Для решений этих интегральных уравнений имеют место следующие уравнения:

$$\frac{\partial p_i^j(s,t,x)}{\partial t} + (-1)^i a_j(t,x)\frac{\partial p_i^j(s,t,x)}{\partial x} = 0, \quad i,j = 1{,}2.$$

Используем дополнительное обозначение:

$$f_i^j(t,x;W(t,x)) = (-1)^{i+1}D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]g_i^j(t,x,W(t,x)), \quad i,j = 1{,}2.$$

ТЕОРЕМА. Пусть

1) $\phi_k^j(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$, $k = 0{,}1$, $j = 1{,}2$, $a_j(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $j = 1{,}2$

2) $c_j(t,x,w) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$, $j = 1{,}2$

И эти функции и их частные производные первого порядка удовлетворяют условию Липшица по аргументу W;

3) функции $F_j(t,x,u_1,u_2) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R^2)$, j=1,2 и удовлетворяют условию Липшица: $\left|F_j(t,x,u_1^1,u_2^1) - F_j(t,x,u_1^2,u_2^2)\right| \le L_1\|u_1^1 - u_1^2\|_{G_2(T)} + L_2\|u_2^1 - u_2^2\|_{G_2(T)}$, $\quad L_i = const, i = 1{,}2.$

Тогда существует такое неотрицательное число T*, что задача (1)-(2) имеет единственное решение в $C_b^{(2)}(G_2(T)$. Мы подтверждаем доказательство теоремы доказательством нескольких лемм.

Лемма 1. Решение задачи (1)-(2) удовлетворяет системе интегральных уравнений, состоящей из следующих 6 неизвестных, и имеет место и обратное:

$$u_j(t,x) = \phi_0^j(p_1^j(0,t,x)) + \int_0^t \vartheta_1^j(s,p_1^j(s,t,x))ds; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_i^j(t,x) = {} & \frac{1}{2}\psi_i^j(p_i^j(0,t,x)) + (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i^j(t,x,u_j(t,x))u_j(t,x) + \\ & +(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i^j(s,p_i^j(s,t,x),u_j(s,p_i^j(s,t,x)))\vartheta_i^j(s,p_i^j(s,t,x))ds - \\ & -\frac{1}{2}\int_0^t f_i^j(s,p_i^j(s,t,x);u_i(s,p_i^j(s,t,x)))u_j(s,p_i^j(s,t,x))ds - \\ & -\frac{1}{2}\int_0^t r_i^j(s,p_i^j,u^j(s,p_i^j(s,t,x)))u^j(s,p_i^j(s,t,x))\vartheta_{3-i}^j(s,p_i^j(s,t,x))ds + \\ & +\int_0^t F_j(s,p_i^j(s,t,x),u_1(s,p_i^j(s,t,x)),u_2(s,p_i^j(s,t,x)))ds, \quad i,j = 1{,}2,\end{aligned} \tag{7}$$

где $\left[2\vartheta_i^j(t,x) + (-1)^i g_i^j(t,x,u)u_j(t,x)\right]\Big|t = 0 = \psi_i^j(x) \quad i,j = 1{,}2,$ (8)

$$\vartheta_i^j(t,x) = D[(-1)^i a_j(t,x)]u_j,\ D[w,v] = w\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial t}. \tag{9}$$

Доказательство. По построению, $\phi_0^j(p_1^j(0,t,x)) + \int_0^t \vartheta_1^j(s,p_1^j(s,t,x))ds = \phi_0^j(p_2^j(0,t,x)) + \int_0^t \vartheta_2^j(s,p_2^j(s,t,x))ds.$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Пусть $\vartheta_i^j(t,x)$, $i,j=1{,}2$, — удовлетворяют (6), (7). Тогда дифференцируя (6), (7) с учетом обозначения (9) имеем:

$$D[(-1)^i a_j(t,x)]u_j = \vartheta_i^j(t,x), \tag{10}$$

$$D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]\vartheta_i^j(t,x) = (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i^j(t,x,u)\vartheta_{3-i}^j(t,x) + \\ +(-1)^i\frac{1}{2}g_i^j(t,x,u)\vartheta_i^j(t,x) + F_j(t,x,u_1,u_2), \quad i.j = 1{,}2. \tag{11}$$

Следовательно, из (10), (11) получаем уравнению (1).

Нам удалось доказать первую часть леммы, то есть, что система интегральных уравнений удовлетворяет поставленной задаче (1), (2). То есть решение Системы (6), (7) будет решением задачи (1), (2). Мы должны получать (6), (7) из задачи (1), (2), представленной во второй части леммы. Здесь используется метод дополнительного аргумента. Применения данного метода для систем уравнений первого порядка приведены в работах [5, 6]. Для применения указанного метода мы можем записать уравнение (1) в удобной для нас форме:

$$D[(-1)^{i+1}a_j(t,x]\big(2\vartheta_i^j(t,x) + (-1)^i g_i^j(t,x,u)u\big) = (-1)^i g_i^j(t,x,u_j)\vartheta_i^j(t,x) - \\ -f_i^j(t,x;u_j)u_j - r_i^j(t,x,u_j)u_j(t,x)\vartheta_{3-i}^j(t,x) + 2F_j(t,x,u_1,u_2), \quad i,j = 1{,}2. \tag{12}$$

(12) дает уравнению (1):

$$2D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]\vartheta_i^j(t,x) - r_i^j(t,x,u_j)\vartheta_k^j(t,x)u_j(t,x) - f_i^j(t,x;u_j)u_j(t,x) \\ + +(-1)^i g_i^j(t,x,u_j)\vartheta_k^j(t,x) \\ = (-1)^i g_i^j(t,x,u)\vartheta_i^j(t,x) - f_i^j(t,x;u_j)u_j(t,x) - -r_i^j(t,x,u_j)\vartheta_{3-i}^j(t,x)u_j(t,x) \\ + F_j(t,x,u_1,u_2), \quad i,j,k = 1{,}2.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]\vartheta_i^j(t,x)\ (-1)^{i+1}g_i^j(t,x,u_j)\vartheta_{3-i}^j(t,x) \\ + (-1)^i g_i^j(t,x,u)\vartheta_i^j(t,x) + +2F_j(t,x,u_1,u_2), \quad i,j = 1{,}2. \tag{13}$$

Из (13): $2\left[\frac{\partial^2 u_j(t.x)}{\partial t^2} - a_j{}^2(t,x)\frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + (-1)^i\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]a_j(t,x)\right] =$

$$= (-1)^{i+1}g_i^j(t,x,u_j)\left(\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} + (-1)^{i+1}a_j(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}\right) + (-1)^i g_i^j(t,x,u_j) \times \\ \times\left(\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} + (-1)^i a_j(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}\right) + 2F_j(t,x,u_1,u_2), \quad i,j = 1{,}2.$$

Отсюда $2\left[\frac{\partial^2 u_j(t.x)}{\partial t^2} - a_j{}^2(t,x)\frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + (-1)^i\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]a_j(t,x)\right] =$ $2\big(c_j(t,x,u) + (-1)^i D[(-1)^{i+1}a_j(t,x)]a_j(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}, \quad i,j = 1{,}2.$

Таким образом, мы показали, вторую часть леммы 1. Используем обозначение:

$z_j(t,x;u_j) = 2\vartheta_i^j(t,x) + (-1)^i g_i^j(t,x,u)u.$

Для (12) используем метод дополнительного аргумента. Следовательно, получаем следующее уравнение, т.е. интегро-дифференциальное уравнение:

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

$$z_j(t,x;u_j) = \phi_i^j\left(p_i^j(0,t,x)\right) + (-1)^i\int_0^t g_i^j(s,p_i^j,u_j(s,p_i^j))\vartheta_i^j(s,p_i^j)ds - \int_0^t f_i^j(s,p_i^j;u_j(s,p_i^j))u_j(s,p_i^j)ds - \int_0^t r_i^j(s,p_i^j,u_j(s,p_i^j))u_j(s,p_i^j)\vartheta_{3-i}^j(s,p_i^j)ds + 2\int_0^t F_j(s,p_i^j;u(s,p_i^j))ds, \quad i,j = 1,2. \tag{14}$$

С помощью операции дифференцирования можно получить из (14) уравнение (13). А (14) с учетом (3), (4) дает нам (7). Для (10) применяя метода дополнительного аргумента, получаем (6). Следует отметить, что для рассматриваемых уравнений также имеют место соответствующие начальные условия (2), (8). Лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое неотрицательное число T^*_+, что система интегральных уравнений (6)-(7) имеет единственное решение в области $G_2(T^*)$.

Доказательство. Запишем систему (6), (7) в виде:

$$\theta(t,x) = A(t,x;\theta), \tag{15}$$

где $\theta = (\theta_1^1,\theta_1^2,\theta_2^1,\theta_2^2,\theta_3^1,\theta_3^2)$ — функции переменных (t,x).

Применены обозначения: $\theta_i^j = \vartheta_i^j(t,x)$, $i,j = 1,2$, $\theta_3^j = u_j(t,x)$, $j = 1,2$;

$A=(A_1^1,A_1^2,A_2^1,A_2^2,A_3^1,A_3^2)$, где $A_i^j(t,x;\theta) = \frac{1}{2}\psi_i^j(p_i^j(0,t,x)) + (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i^j(t,x,\theta_3^j)\theta_3^j +$
$+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i^j(s,p_i,\theta_i^j(s,p_i))\theta_i^j(s,p_i^j)ds - \frac{1}{2}\int_0^t f_i^j(s,p_i^j;\theta_3^j(s,p_i^j))\theta_3^j(s,p_i^j)ds -$
$-\frac{1}{2}\int_0^t r_i^j(s,p_i^j,\theta_3^j(s,p_i^j))\theta_3^j(s,p_i^j)\theta_{3-i}^j(s,p_i^j)ds + \int_0^t F_j(s,p_i^j;\theta_3^j(s,p_i^j))ds$, $i,j = 1,2$;

$$A_3^j(t,x;\theta) = \phi_0^j(p_1^j(0,t,x)) + \int_0^t \theta_1^j(s,p_1^j(s,t,x))ds.$$

Мы должны доказать, что уравнение (15) имеет в области $G_2(T^*)$ при неотрицательном T^* решение и оно единственно. Норму определим следующим образом: $\|\theta\|_* = \max\limits_{(t,x)\in G_2(T*)}\{\,|\theta_i(t,x)|,\ i = 1,2,3\}$.

Из условий теоремы имеем:

1. $A(t,x;0)$ ограничено.
2. $\|A(\theta') - A(\theta'')\|_* \le T * L * \|\theta' - \theta''\|_*$,

где $L*$ — некоторая константа, определяемая из норм и коэффициентов Липшица заданных функций.

По принципу сжатых отображений можно утверждать, что лемма 2 доказана. Следовательно, Теорема доказана.

Выводы

Привели задачу Коши для рассматриваемой системы к интегральной системе с последующим доказательством существования и единственности решения интегральной системы. Полученные в статье результаты можно распространить на случай, когда уравнения системы содержат частные производные первого порядка по времени.

Список литературы:

1. Аширбаева А. Ж., Мамазияева Э. А. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению // Вестник ОшГУ. 2013. №1. С. 87-90.

2. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К теории нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады Академии наук. 1992. Т. 323. №3. С. 410-414.

3. Колмогоров А. Н., Фомин С. И. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.

5. Мамбетов Ж. И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром // Вестник Ошского государственного университета. 2017. №4. С. 109-112.

6. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2019. №11. С. 15-19.

References:

1. Ashirbaeva, A. Zh., & Mamaziyaeva, E`. A. (2013). Novy`j sposob privedeniya differencial`nogo urav-neniya v chastny`x proizvodny`x vtorogo poryadka giperbolicheskogo tipa k integral`nomu uravneniyu. *Vestnik OshGU,* (1), 87-90. (in Russian).

2. Imanaliev, M. I., & Alekseenko, S. N. (1992). K teorii nelinejny`x integrodifferencial`ny`x uravnenij v chastny`x proizvodny`x tipa Uizema. In *Doklady` Akademii nauk, 323*(3), 410-414. (in Russian).

3. Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. I. (1968). E`lementy` teorii funkcij i funkcional`nogo analiza. Moscow. (in Russian).

4. Krasnov, M. L. (1975). Integral`ny`e uravneniya. Moscow. (in Russian).

5. Mambetov, Zh. I. (2017). Postroenie reshenij sistemy` nelinejny`x integro-differencial`ny`x uravnenij v chastny`x proizvodny`x pervogo poryadka s vy`rozhdenny`m yadrom. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 109-112. (in Russian).

6. Sady`kova, G. K. (2019). Issledovanie resheniya odnoj sistemy` nelinejny`x differencial`ny`x uravnenij v chastny`x proizvodny`x pervogo poryadka. *Izvestiya VUZov Ky`rgy`zstana,* (11), 15-19. (in Russian).

Поступила в редакцию 16.03.2026 г.

Принята к публикации 21.03.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Аширбаева А. Ж., Бекиева М. Р., Зулпукаров Ж. А. Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с пространственной переменной // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №6. С. 14-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/01

Cite as (APA):

Ashirbaeva, A., Bekieva, M., & Zulpukarov, Zh. (2026). Solving a System of Second-Order Partial Differential Equations with a Spatial Variable Derivative. *Bulletin of Science and Practice, 12*(6), 14-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/127/01

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)