УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/124/01

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ И ЗАДЕРЖКА РЕШЕНИЯ

*©**Алыбаев К. С.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова, г. Манас, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Эрматали уулу Б.**, ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-код: 6820-5273, Жалал-Абадский государственный университет им. Б.Осмонова, г. Манас, Кыргызстан, ermatalievbayaman@gmail.com*

SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH ZEROS AND POLES AND SOLUTION DELAY

*©**Alybaev K**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, Dr. habil., Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Manas, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Ermatali uulu B**., ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-code: 6820-5273, Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Manas, Kyrgyzstan, ermatalievbayaman@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается асимптотическое поведение решений системы сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений с логарифмическими полюсами. Рассматриваемая система имеет положение равновесия, устойчивость которого нарушается при определённом значении медленной переменной. Основное внимание уделяется явлению задержки решения после потери устойчивости, при котором траектория решения системы быстрых переменных в течение конечного промежутка времени остаётся вблизи неустойчивого положения равновесия. Для проведения анализа, система приводится к комплексной форме и сводится к интегральному уравнению специального вида. В комплексной плоскости строится соответствующая область, и с использованием методов линии уровня и последовательных приближений доказывается существование решения. Получена асимптотическая оценка решения на отрезке, часть которого соответствует неустойчивому положению равновесия. Полученные результаты уточняют влияние логарифмических полюсов на динамику системы и описывают область, в которой наблюдается явление задержки решения.

Abstract. Examines the asymptotic behavior of solutions to a system of singularly perturbed differential equations with logarithmic poles. The system under consideration possesses an equilibrium point whose stability is lost at a certain value of the slow variable. The main focus is on the phenomenon of solution delay after the loss of stability, in which the trajectory of the solution corresponding to the fast variables remains in the vicinity of the unstable equilibrium point for a finite time interval. For the analysis, the system is transformed into a complex form and reduced to a special type of integral equation. An appropriate domain is constructed in the complex plane, and the existence of a solution is proved using the methods of level curves and successive approximations. An asymptotic estimate of the solution on an interval, part of which corresponds to the unstable equilibrium, is obtained. The results clarify the influence of logarithmic poles on the system dynamics and describe the region in which the phenomenon of solution delay is observed.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, логарифмический полюс, изменение устойчивости, асимптотические оценки, метод последовательных приближений, линии уровня монотонность.

Keywords: singular perturbations, logarithmic pole, change of stability, asymptotic estimates, method of successive approximations, level curves monotonicity.

Обьект исследования и постановка задачи

Основным обьектом исследования является уравнение следующего вида

$$\varepsilon x' = A(y)\tilde{x} + f(\tilde{x}), \tag{1}$$

$$y' = 1, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $x = (x_1, \dots, x_4), \tilde{x} = (x_1 - y, x_2, x_3 - y, x_4), A(y) = diag\big(A_1(y), A_2(y)\big)$, $A_1(y), A_2(y)$ некоторые матрицы второго порядка; $f(0) \equiv 0$.

Уравнения вида (1)-(2) называются сингулярно возмущенными. В данной работе рассмотрим следующий случай:

$$A_1(y) = \begin{pmatrix} 2y & -2 \\ 2 & 2y \end{pmatrix}, A_j(y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y}{y^2+1} & -\dfrac{2}{y^2+1} \\ \dfrac{2}{y^2+1} & \dfrac{2y}{y^2+1} \end{pmatrix}.$$

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что нули и полюса собственных значений матрицы $A(y)$ попарно совпадают.

Система (1) называется системой быстрых движений [1, 2] и она в точке $(y, 0, y, 0)$ имеет положение равновесия, причем положение равновесия устойчива при $y < 0$ и неустойчива при $y > 0$ т.е при переходе значения $y = 0$ устойчивость положения теряется.

Задача. Исследовать реешение системы (1) на (3 Р).

Такие задачи исследованы в [3-9]. Для решения задачи используем метод разработтанный в [5, 10].

Решение задачи.

1. Матрица $A(y)$ имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}(y) = 2(y \pm i), \lambda_{3,4}(y) = \tfrac{2}{y \pm i}.$$

Решение уравнения (2) возьмём в виду $y = t$ и для решения системы (1) рассмотрим задачу

$$\|\tilde{x}(t_0, \varepsilon)\| \leq O(\varepsilon),\ t_0 \in R \text{ и } t_0 < 0.\text{В} \tag{3}$$

введем новые функции следующим образом

$$x_1 - t = u_1,\ x_2 = u_2,\ x_3 - t = u_3,\ x_4 = u_4.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon u_1' = 2tu_1 - 2u_2 + f_1(u_1,u_2,u_3,u_4) - \varepsilon,\\ \varepsilon u_2' = 2u_1 - 2tu_2 + f_2(u_1,u_2,u_3,u_4),\\ \varepsilon u_3' = \frac{2t}{t^2+1}u_3 - \frac{2}{t^2+1}u_4 + f_3(u_1,u_2,u_3,u_4) - \varepsilon,\\ \varepsilon u_4' = \frac{2}{t^2+1}u_3 - \frac{2t}{t^2+1}u_4 + f_4(u_1,u_2,u_3,u_4).\end{gathered} \tag{4}$$

В (4) второе уравнение умножив на (i) и сложим с первым уравнением (затем проведем вычитание в том же порядке), четвертое уравнение умножив на $(-i)$ и сложим с четвертым (затем проведем вычитание в том же порядке).

В результате проведенных действий получим систему

$$\begin{gathered}\varepsilon z_1' = \lambda_1(t)z_1 - \varepsilon + f_{11}(z_1,z_2,z_3,z_4),\\ \varepsilon z_2' = \lambda_2(t)z_2 - \varepsilon + f_{21}(z_1,z_2,z_3,z_4),\\ \varepsilon z_3' = \lambda_3(t)z_3 - \varepsilon + f_{31}(z_1,z_2,z_3,z_4),\\ \varepsilon z_4' = \lambda_4(t)z_4 - \varepsilon + f_{41}(z_1,z_2,z_3,z_4),\end{gathered} \tag{5}$$

с начальным условием

$$\|z(t_0,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon, \tag{6}$$

где $\lambda_{1,2}(t) = 2(t \pm i), \lambda_{3,4}(t) = \frac{2}{t \pm i}$, $z = (z_1,z_2,z_3,z_4)$, $f_{j1} = f_1 + (-1)^{j-1}f_2, j = 1,2;$ $f_{j1} = f_3 + (-1)^{j-1}f_4, j = 3,4.$

Здесь и далее буквами $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительных постоянных не зависящих от ε. Пусть выполняются условия:

У1. $f(z) \in Q(H)$ – пространство аналитических функций в области

$$H = \{(t,z), t \in D, \|z\| \le c_2\},$$

где $D = \{t \in C -$ множество комплексных чисел, $|t| \le r_0 \in R\}$;

$$f_1(z) = \big(f_{11}(z), f_{21}(z), f_{31}(z), f_{41}(z)\big).$$

У2. $\forall((t,\tilde{z}),(t,\tilde{\tilde{z}})) \in H(\|f_1(\tilde{z}) - f_1(\tilde{\tilde{z}})\| \le c_3\|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\| max\{\|\tilde{z}\|, \|\tilde{\tilde{z}}\|\}$.

Задачу (5)-(6) заменим следующим

$$z_j = z_{j0} exp\frac{F_j(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[-\varepsilon + f_{j1}(z_1,z_2,z_3,z_4)] exp\frac{F_j(t) - F_j(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{7}$$

где $F_j(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau)d\tau, j = 1,2,3,4.$

Теперь основная задача заключается в исследовании асимптотического поведения решения системы (7).

Для решения этой задачи к (7) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом

$$z_{jm} = z_{j0} exp\frac{F_j(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[-\varepsilon + f_{j1}(z_{1m-1},z_{2m-1},z_{3m-1},z_{4m-1})] exp\frac{F_j(t) - F_j(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{8}$$

$$z_{j0} \equiv 0, m = 1,2, \dots$$

Т. 12. №3 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/124

Определим область в комплексной плоскости. Для этого рассмотрим функции

$$F_{j0}(t) = (t \pm i)^2, \qquad j = 1,2; \; F_{j0}(t) = 2\ln(t \pm i), \qquad j = 3,4.$$
$$F_j(t) = F_{j0}(t) - F_{j0}(t_0).$$

Для определения области используем функции

$$ReF_{j0}(t) \; (j = 1,2,3,4).$$

Заметим, что функции $ReF_{10}(t)$и $ReF_{20}(t)$; $ReF_{30}(t)$ и $ReF_{40}(t)$ в симметричных точках, относительно действительной оси, принимают равные значения. Далее симметрию будем понимать, только относительно действительной оси.

Возьмём функцию $F_{10} = t_1^2 + (t_2 - 2)^2$

и определим линию уровня $t_1^2 + (t_2 - 2)^2 = 9$.

Отсюда определяем функцию

$$t_2 = 2 - \sqrt{9 - t_1^2}. \qquad \text{(K\_1)}$$

Функции ReF_1 и ReF_4 рассмотрим на кривой (K_1), причем будем считать, что $-\sqrt{5} \le t_1 < 0$.

При таком условии (K_1) соединяет точки $(-\sqrt{5}; 0)$ и (0; -1).

$$ReF_1 = t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = t_1^2 - \left(3 - \sqrt{9 - t_1^2}\right)^2.$$

Определим монотонность ReF_1. Имеем

$$(ReF_1)' = 2t_1 - 2\left(3 - \sqrt{9 - t_1^2}\right) \cdot \frac{t_1}{\sqrt{9 - t_1^2}} = 2t_1\left(2 - \frac{3}{\sqrt{9 - t_1^2}}\right) =$$
$$= 2t_1 \frac{25 - 4t_1^2}{\sqrt{9 - t_1^2}\left(2\sqrt{9 - t_1^2} + 3\right)}.$$

Отсюда следует при $(-\sqrt{5} \le t_1 < 0$ функция ReF_1 строго убывает по (K_1).

Теперь проверим на монотонность ReF_4 на кривой (K_1). Для этого достаточно рассмотреть функцию

$$F_{40} = t_1^2 + (t_2 - 1)^2.$$

Имеем

$$F_{40} = t_1^2 + \left(1 - \sqrt{9 - t_1^2}\right)^2.$$

Отсюда

$$(F_{40})' = 2t_1 + 2\left(1 - \sqrt{9 - t_1^2}\right) \cdot \frac{t_1}{\sqrt{9 - t_1^2}} = \frac{2t_1}{\sqrt{9 - t_1^2}}.$$

Следовательно при $-\sqrt{5} \le t_1 < 0$ функция F_{40}, а также ReF_4 убывают.

Возьмём

$$t_2 = t_1 - 1 + \delta \; (0 < \delta - \text{не зависит от } \varepsilon) \qquad \text{(K\_2)}$$

Как и в предыдущем случае установим монотонность функций $ReF_1(t)$ и F_{40} на кривой (K_2). Имеем $ReF_1(t) = t_1^2 - (t_2 + \delta)^2, (ReF_1)' = -2\delta < 0. ReF_1(t)$- строго убывает по (K_2).

Далее $F_{40} = t_1^2 + (t_1 - 2 + \delta)^2, F_{40}' = 4\left(t_1 - \frac{2-\delta}{2}\right)$.

 Т. 12. №3 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/124

Согласно полученного выражения для F'_{40}, если $t_1 < \frac{2-\delta}{2}$, то F_{40}-убывает по (K_2). (K_2) пересекает ось t_1 в точке $t_{10} = 1 - \delta$ и $1 - \delta < \frac{2-\delta}{2}$. Таким образом F_{40} строго убывает по (K_2). Определим $(\bar{K}_1), (\bar{K}_2)$ симметричные к $(K_1), (K_2)$.

Функции ReF_1 и ReF_2 ; ReF_3 и ReF_4 в симметричных точках принимают равные значения. Тогда по $(\bar{K}_1) \cup (\bar{K}_2)$ функции ReF_2 и ReF_3 также убывают. Область ограниченный $(K_1), (K_2), (\bar{K}_1), (\bar{K}_2)$ обозначим D_0 (Рисунок).

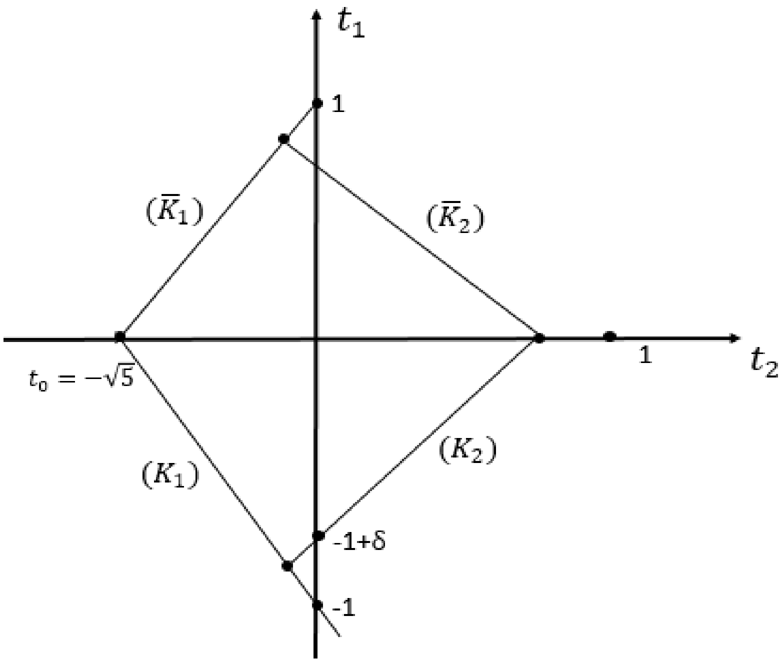

Рисунок. Область D_0

Последовательные приближения (8) рассмотрим в области D_0 . Определим пути интегрирования для (8). Путь для z_{1m}, z_{2m} состоит из части $(K_1) \cup (K_2)$ соединяющего точки $t_0 = -\sqrt{5}$ и $\tilde{t}$; прямолинейного отрезка соединяющего точки $\tilde{t} = t_1 + i\tilde{t}_2,\ t = t_1 + it_2$.

Пусть для z_{2m}, z_{3m} выбирается симметричным к путьям для z_{1m}, z_{4m}.

Переходим к оценке и доказательству равномерной сходимости (8) в области D_0.

Пусть

$$\|z_m\| \leq \alpha_m(\varepsilon), \quad \forall t \in D_0, \tag{9}$$

где $\alpha_m(\varepsilon)$-некоторая положительная функция от ε. Если $m = 1$, то $\|z_1\| \leq \alpha_1(\varepsilon)$.

Исходя из выбранных путей интегрирования имеем $\|z_1\| \leq c_1(\varepsilon)|E(t_0, t, \varepsilon)| + \left|\int_{t_0}^{t} E(\tau, t, \varepsilon) d\tau\right|$, где $E(\tau, t, \varepsilon) = diag\left(exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_1(t) - F_1(\tau)\right), \dots, exp\frac{1}{\varepsilon}\left(F_4(t) - F_4(\tau)\right)\right)$.

По выбраным путьям $ReF_j(t)$ строго убывают. Тогда $|E(t_0, t, \varepsilon)| \leq 1.$ и интегралы $\int_{t_0}^{t} exp\frac{F_j(t)-F_j(\tau)}{\varepsilon} d\tau$ можно интегрировать по частьям.

Учитывая сказанное получим $\|z_1\| \leq c_1\varepsilon + c_{11}\varepsilon = c_4\varepsilon, c_4 > c_1$. Далее, учитывая У1, У2 имеем $\|z_{m+1}\| \leq c_4\varepsilon + \frac{c_3}{\varepsilon}\left|\int_{t_0}^{t} \|z_m\|^2 \|E(\tau, t, \varepsilon)\| |d\tau|\right| \leq c_4\varepsilon + \frac{c_5}{\varepsilon}\alpha_m^2(\varepsilon)\varepsilon = c_4\varepsilon + c_5\alpha_m^2(\varepsilon)$,

$$\|z_{m+1}\| \leq c_4\varepsilon + c_5\alpha_m^2(\varepsilon), c_5 > c_4. \tag{10}$$

Т. 12. №3 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/124

Таким образом $\alpha_{m+1}(\varepsilon) = c_4\varepsilon + c_5\alpha_m^2(\varepsilon)$.

Если $m = 1$, то $\alpha_2(\varepsilon) = c_4\varepsilon + c_5\alpha_1^2(\varepsilon) \le c_4\varepsilon + c_5c_4^2\varepsilon^2 = \varepsilon(c_4 + c_5c_4^2\varepsilon)$. Пусть $c_4 + c_5c_4^2\varepsilon \le c_5$ или $\varepsilon \le \frac{c_5-c_4}{c_5c_4^2}$. При таком условии $\alpha_2(\varepsilon) \le c_5\varepsilon$. Также $\alpha_3(\varepsilon) \le c_4\varepsilon + c_5^3\varepsilon^2 = \varepsilon(c_4 + c_5^3\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon \le \frac{c_5-c_4}{c_5^3}$. Условия наложенные на ε, при малых значениях ε выполняются. Тогда $\alpha_3(\varepsilon) \le c_5\varepsilon$. Итого получим

$$\alpha_{m+1}(\varepsilon) \le c_5\varepsilon, m = 0, 1, 2, \dots \tag{11}$$

Учитывая (11) оценку (10) можем записать в виде

$$\|z_{m+1}\| \le c_5\varepsilon, m = 0, 1, 2, \dots;\ t \in D_0. \tag{12}$$

Докажем равномерную сходимость (8).

Пусть справедлива оценка

$$\|z_m - z_{m-1}\| \le \beta_m(\varepsilon), t \in D_0, \tag{13}$$

где $\beta_m(\varepsilon)$-некоторая положительная функция от ε. Если $m = 1$, то $\beta_1(\varepsilon) \le c_5\varepsilon$. Далее имеем $\|z_m - z_{m-1}\| \le \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_{t_0}^{t} c_3\|z_m - z_{m-1}\| max\{\|z_m\|, \|z_{m-1}\|\} \cdot \|E(\tau, t, \varepsilon)\|\,|d\tau|\right| \le \frac{c_3}{\varepsilon}\alpha_m(\varepsilon) \cdot c_5\varepsilon\left|\int_{t_0}^{t}\|E(\tau, t, \varepsilon)\|\,|d\tau|\right| \le c_3c_5(\varepsilon) \cdot c_0\varepsilon = c_0c_3c_5\varepsilon\beta_m(\varepsilon)$, $\beta_{m+1}(\varepsilon) = c_0c_3c_5\varepsilon\beta_m(\varepsilon)$.

Отсюда имеем: если $m = 1$, то $\beta_2(\varepsilon) = c_0c_3c_5\varepsilon\beta_1(\varepsilon) \le c_0c_3c_5\varepsilon \cdot c_5\varepsilon = c_0c_3(c_5\varepsilon)^2$; если $m = 2$, то $\beta_3(\varepsilon) \le c_0c_3c_5\varepsilon\beta_2(\varepsilon) \le (c_0c_3)^2(c_5\varepsilon)^3$.

Таким образом $\beta_{m+1}(\varepsilon) \le (c_0c_3)^m(c_5\varepsilon)^{m+1} = \frac{1}{c_0c_3}(c_0c_3c_5\varepsilon)^{m+1}$. При условии $(c_0c_3c_5\varepsilon) < 1$, ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(z_m - z_{m-1})$ равномерно сходится, в D_0, к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением (7). Если учесть (12), для этого решения справедлива оценка

$$\|z\| \le c_5\varepsilon, t \in D_0. \tag{14}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть рассматривается задача (5-6) при условии У1-У2. Тогда существует область $D_0 \in D$ и $z(t, \varepsilon)$ – решение этой задачи определенное в D_0 и для этого решения справедлива оценка (14).

Следствие. Если оценку (14) рассмотреть на действительной оси, то для решения систем (1)-(2) получим

$$\|\tilde{x}\| \le c_5\varepsilon,\ t_0 = -\sqrt{5} \le t \le 1 - \delta. \tag{15}$$

Оценка (15) показывает, когда положение равновесия становится неустойчивым, то решение системы (1) не сразу покидает возникщее неустойчивое положение равновесия, а остается в близи него на отрезке $[0; 1 - \delta]$ времени t.

Список литературы:

1. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром // Труды Математического института имени ВА Стеклова. 1985. Т. 169. №0. С. 99-118.

2. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.

3. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии Наук СССР. 1973. Т. 209. 3. С. 576–579.

4. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №12. С. 2060-2067.

5. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.

6. Alybaev K. S., Juraev A. M., Nurmatova M. N. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. .V 45. №3. P. 912-921. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791

7. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

8. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

9. Эрматали уулу Б. Сингулярно возмущенные уравнения с особенностями в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №11. С. 12-18. https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01

10. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К., Матанов Ш. М., Эрматали уулу Б. Сравнительный анализ методов асимптотической оценки интегралов содержащих большой параметр // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 19-30. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02

References:

1. Pontryagin, L. S., & Mishchenko, E. F. (1985). Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova, 169*(0), 99-118. (in Russian).

2. Mishchenko, E. F., & Rozov, N. Kh. (1975). Differentsial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya. Moscow. (in Russian).

3. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii Nauk SSSR, 209*(3), 576–579. (in Russian).

4. Neishtadt, A. I. (1987). O zatyagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. *Differentsial'nye uravneniya, 23*(12), 2060-2067. (in Russian).

5. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU, 3*, 190-200. (in Russian).

6. Alybaev, K. S., Juraev, A. M., & Nurmatova, M. N. (2024). Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *45*(3), 912-921. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791

7. Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 10*(3), 14-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

8. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

9. Ermatali uulu, B. (2025). Singularly Perturbed Equations with Singularities in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 11*(11), 12-18. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01

10. Alybaev, K, Narymbetov, T., Matanov, S., Ermatali uulu, B. (2025). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice, 11*(2), 19-30. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02

Поступила в редакцию 16.01.2026 г.

Принята к публикации 25.01.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Эрматали уулу Б. Сингулярно возмущенные уравнения с нулями и полюсами и задержка решения // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №3. С. 14-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/124/01

Cite as (APA):

Alybaev, K, & Ermatali uulu, B. (2026). Singularly Perturbed Equations with Zeros and Poles and Solution Delay. *Bulletin of Science and Practice, 12*(3), 14-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/124/01