

УДК 517.984, 621.431

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/02>

ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗДАТОЧНОГО РЕДУКТОРА ОТ ЕГО ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

©Сафина Г.Ф., ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-код: 4562-2453, канд. физ.-мат. наук,

Уфимский университет науки и технологий, г. Нефтекамск, Россия, safinagf@mail.ru

©Кириллова Е. А., Уфимский университет науки и технологий,

г. Нефтекамск, Россия, elize.none@yandex.ru

©Коняев Ю. С., Уфимский университет науки и технологий,

г. Нефтекамск, Россия, elize.none@yandex.ru

DEPENDENCE OF TORSIONAL OSCILLATION FREQUENCIES OF A TRANSFER GEARBOX ON ITS PHYSICAL PARAMETERS

©Safina G., ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-code: 4562-2453, Ph.D.,

Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia, safinagf@mail.ru

©Kirillova E., Ufa University of Science and Technology,

Neftekamsk, Russia, elize.none@yandex.ru

©Konyaev Yu., Ufa University of Science and Technology,

Neftekamsk, Russia, elize.none@yandex.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача определения частот крутильных колебаний раздаточного редуктора. Получено частотное уравнение задачи, с помощью которого исследовано влияние на частоты колебаний редуктора характеристик его масс и жесткостей. К численным расчетам привлечены команды математического пакета, с помощью которых составлены таблицы соответствующих зависимостей.

Abstract. The problem of determining the frequencies of torsional oscillations of a distribution reduction gearbox is considered in the paper. The frequency equation of the problem was obtained, and used to study the influence of the characteristics of its masses and rigidities on the frequencies of oscillations of the reducer. Mathematical package commands were used in numerical calculations to compile tables of corresponding dependencies.

Ключевые слова: раздаточный редуктор, частотное уравнение, физические характеристики, зависимости, графики, пакет Maple.

Keywords: transfer gear, frequency equation, physical characteristics, dependencies, graphs, Maple package.

Исследования работы относятся к задачам свободных и вынужденных колебаний механических систем, моделируемых динамическими системами с конечным числом степеней свободы [1-5].

Исследования зависимостей частот колебаний любого механизма от его физических и геометрических характеристик играют важную роль для устранения проблем, связанных с возникновением резонансных частот, а также с решениями задач по определению таких входных параметров механизма, которые обеспечили бы уменьшение его износа, увеличение надежности эксплуатации, выброзащиты всего механизма или отдельных ее частей. Подобной задаче с раздаточным редуктором и посвящена данная работа. Модель раздаточного редуктора

(шестерня и два краевых подшипника на валу) показана на Рисунке 1. Описание колебательного процесса такого редуктора приводит к крутильным колебаниям механической системы с тремя степенями свободы – вала с тремя дисками (шестерни и двух подшипников), для которых приняты: $\varphi_k (k = \overline{1; 3})$ – углы закручивания дисков (как обобщенные координаты для степеней свободы), $I_k (k = \overline{1; 3})$ – моменты инерции дисков, c_1, c_2 – коэффициенты жесткостей участков вала (Рисунок 2).

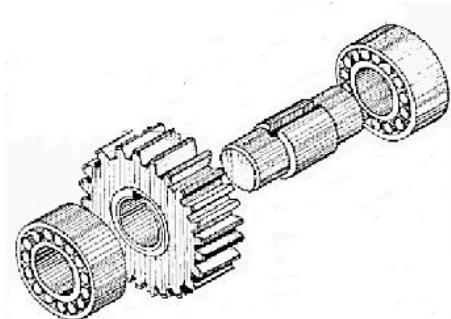


Рисунок 1. Раздаточный редуктор

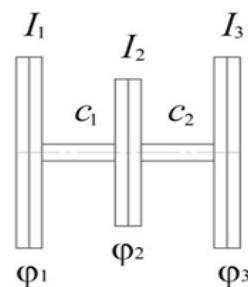


Рисунок 2. Модель с тремя степенями свободы

Тогда крутильные колебания редуктора опишем стандартными приемами с помощью энергетического метода следующей системой дифференциальных уравнений [4-6]:

$$\begin{cases} I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Из системы (1) с учетом ее решений $\varphi_k = M_k \cos pt$, в которых $M_k (k = \overline{1; 3})$ – амплитуды, p – собственная частота крутильных колебаний, приходим к следующей системе, линейной относительно ненулевых M_k :

$$\begin{cases} I_1 p^2 M_1 - c_1(M_1 - M_2) = 0; \\ I_2 p^2 M_2 + c_1(M_1 - M_2) - c_2(M_2 - M_3) = 0; \\ I_3 p^2 M_3 + c_2(M_2 - M_3) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [6] получено частотное уравнение задачи в виде:

$$(I_1 I_2 I_3 p^4 - (c_1 I_3 (I_1 + I_2) + c_2 I_1 (I_2 + I_3)) p^2 + c_1 c_2 (I_1 + I_2 + I_3)) p^2 = 0. \quad (3)$$

Численные расчеты по уравнению (3) при различных физических характеристиках раздаточного редуктора позволяют установить их влияние на значения частот его колебаний.

Пример: определим частоты колебаний раздаточного редуктора при его характеристиках:

$$c_1 = 0,3 \cdot 10^3 H/m, c_2 = 0,34 \cdot 10^3 H/m, I_1 = 4,7 \text{кг} \cdot m^2, I_2 = 8,2 \text{кг} \cdot m^2, I_3 = 4,3 \text{кг} \cdot m^2 \quad (4)$$

Расчеты, проведенные с уравнением (3) с учетом (4) приводят к следующим значениям частот колебаний редуктора: $p_1 = 8,3814 \text{ c}^{-1}$ и $p_2 = 12,2760 \text{ c}^{-1}$.

Покажем проведенные расчеты в пакете Maple [7]:

```

> restart; Digits:=20:
> with(LinearAlgebra):
> M:= Matrix(3, [[i1*p^2-c1, c1, 0], [c1, i2*p^2-c1-c2, c2], [0, c2, i3*p^2-c2]]):
> y:=Determinant(M):
> eq:=collect(y,p,distributed):
> c1:=0.3*10^3: c2:=0.34*10^3: i1:=4.7: i2:=8.2: i3:=4.3:
> eq: eq1:=eq:
> p:=fsolve(eq1,p);
p := -12.27600315,
-8.381412884,
0.,
0.,
8.381412884,
12.27600315
> p1:=p[5]; p2:=p[6];
p1 := 8.381412884
p2 := 12.27600315

```

Проведенные исследования по прямой задаче показывают, что при этом увеличения характеристик масс ведут к уменьшению значений частот колебаний, а увеличение характеристик жесткостей — к увеличению частот. Вышесказанное представим на Таблицах и графиках полученных зависимостей по численным расчетам из частотного уравнения с применением алгоритма в пакете Maple. В Таблицах 1 и 2, а также графиках Рисунка 3 даны зависимости первой p_1 и второй p_2 частот свободных крутильных колебаний раздаточного редуктора от меняющихся значений коэффициента c_1 жесткости участка вала от левого подшипника до шестерни (при остальных параметрах (4) механической системы).

Таблица 1
 ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ p_1 И p_2 ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ c_1
 УЧАСТКА ВАЛА РЕДУКТОРА ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ОСТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ (4)

$c_1 \cdot 10^3 \text{Н/м}$	$c_2 \cdot 10^3 \text{Н/м}$	$p_1, \text{с}^{-1}$	$p_2, \text{с}^{-1}$
0,30	0,34	8,3814	12,2760
0,35	0,34	8,7601	12,6864
0,40	0,34	9,0412	13,1406
0,45	0,34	9,2499	13,6234
0,50	0,34	9,4064	14,1213

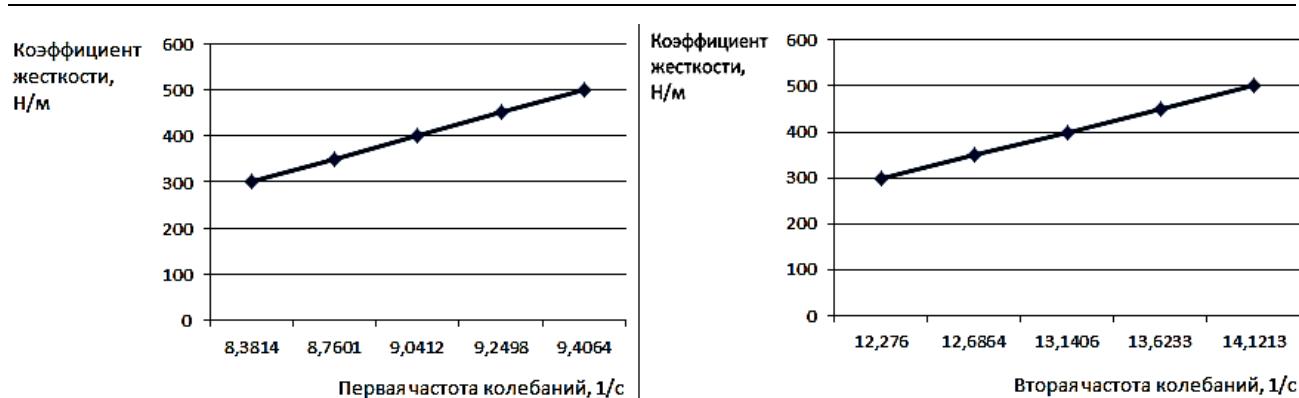


Рисунок 3. Зависимость частот колебаний p_1 и p_2 от коэффициента жесткости c_1 участка вала редуктора при неизменных остальных параметрах (4)

Если в расчетах увеличивать одновременно значения коэффициентов жесткостей c_1 и c_2 участков вала между подшипниками и шестерней раздаточного редуктора, то значения обоих частот колебаний механизма также растут, но в более значительной степени.

В следующих Таблицах 2 и 3, а также графиках Рисунка 4 показаны зависимости частот колебаний раздаточного редуктора от меняющихся массовых значений, в частности от момента инерции массы левого подшипника редуктора (при остальных параметрах (4) механической системы).

Таблица 2
 ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ p_1 И p_2 ОТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ I_1
 МАССЫ ПОДШИПНИКА ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ОСТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ (4)

$I_1, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_2, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$
4,7	8,3	4,3	8,3814	12,2760
5,7	8,3	4,3	7,9307	12,1183
6,7	8,3	4,3	7,5731	12,0226
7,7	8,3	4,3	7,2844	11,9589
8,7	8,3	4,3	7,0472	11,9137

Таблица 3
 ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ p_1 И p_2 ОТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ I_2 МАССЫ
 ШЕСТЕРНИ ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ОСТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ (4)

$I_1, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_2, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_3, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$
4,7	8,3	4,3	8,3814	12,2760
4,7	8,7	4,3	7,8968	12,0920
4,7	9,2	4,3	7,4056	12,0056
4,7	9,8	4,3	7,0467	11,8455
4,7	10,5	4,3	7,0387	11,7512



Рисунок 4. Зависимость частот колебаний p_1 и p_2 от момента инерции I_2 массы шестерни при неизменных остальных параметрах (4)

Исследования зависимостей частот колебаний раздаточного редуктора проведены и при одновременном увеличении моментов инерции масс и подшипников и шестерни механизма, что ведет к более резкому снижению частот колебаний, что подтверждает, например, следующая Таблица 4.

Таблица 4

ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ p_1 И p_2 ОТ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ МАСС ШЕСТЕРНИ И ПОДШИПНИКОВ ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ОСТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ (4)

I_1 , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	I_2 , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	I_3 , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	p_1 , с^{-1}	p_2 , с^{-1}
4,7	8,3	4,3	8,3814	12,2760
5,3	8,7	4,8	7,1506	12,0067
5,8	9,2	5,3	7,0277	11,7544
6,2	9,8	4,9	7,0037	11,3476
6,7	10,5	5,4	6,9311	10,9930

Отметим также, что аналогичные зависимости подтверждаются и при других значениях физических и геометрических характеристик раздаточного редуктора, отличных от параметров (4).

Проведены расчеты по влиянию характеристик редуктора на частоты его колебаний важно учитывать при решениях обратных спектральных задач, особо рассматривая алгоритмы сохранения безопасных частот колебаний механизма через определение соответствующих физических его параметров.

Влияние физических и геометрических характеристик раздаточного редуктора на значения частот его крутильных колебаний учитываются для подбора входных данных – расчетах необходимых и допустимых параметров механизма, например, не допускающих возникновения резонансных частот, приводящих к поломкам, износу механизма или к другим негативным проблемам.

Список литературы:

1. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.
3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Ленанд, 2017. 416 с.
4. Зубарев Ю. М. Динамические процессы в технологии машиностроения. Основы конструирования машин. М.: Лань, 2021. 212 с.
5. Кельзон А. С. Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, 1977. 260 с.
6. Сафина Г. Ф., Коняев Ю. С. Алгоритм сохранения частот крутильных колебаний раздаточного редуктора как трехмассовой модели // Физическое образование в ВУЗах. 2024. Т. 30. №1. С. 81-84.
7. Дьяконов В. П. Maple в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2014. 800 с.

References:

1. Akhtyamov, A. M. (2009). Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniya. Moscow. (in Russian).
2. Babakov, I. M. (2004). Teoriya kolebanii. Moscow. (in Russian).
3. Biderman, V. L. (2017). Teoriya mekhanicheskikh kolebanii. Moscow. (in Russian).
4. Zubarev, Yu. M. (2021). Dinamicheskie protsessy v tekhnologii mashinostroeniya. Osnovy konstruirovaniya mashin. Moscow. (in Russian).
5. Kel'zon, A. S. (1977). Raschet i konstruirovaniye rotornykh mashin. Leningrad. (in Russian).

6. Safina, G. F., & Konyaev, Yu. S. (2024). Algoritm sokhraneniya chastot krutil'nykh kolebanii razdаточного reduktora kak trekhmassovoi modeli. *Fizicheskoe obrazovanie v VUZakh*, 30(1), 81-84. (in Russian).
7. D'yakonov, V. P. (2014). Maple v matematicheskikh raschetakh. Moscow. (in Russian).

Поступила в редакцию
29.11.2025 г.

Принята к публикации
05.12.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Сафина Г. Ф., Кириллова Е. А., Коняев Ю. С. Зависимость частот крутых колебаний раздаточного редуктора от его физических параметров // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №1. С. 19-24. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/02>

Cite as (APA):

Safina, G., Kirillova, E., & Konyaev, Yu. (2026). Dependence of Torsional Oscillation Frequencies of a Transfer Gearbox on its Physical Parameters. *Bulletin of Science and Practice*, 12(1), 19-24. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/02>