

УДК 517.928

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01>

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

©Эрматали уулу Б., ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-код: 6820-5273,
Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, ermatalievbayaman@gmail.com

SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH SINGULARITIES IN COMPLEX DOMAINS

©Ermatali uulu B., ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-code: 6820-5273,
Jalal-Abad State University named after B.Osmonov,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение с логарифмическим полюсом. Поставлена задача исследования асимптотического поведения решения и влияние полюса на решение. Задача решена применением конформного отображения некоторой окрестности логарифмического полюса в замкнутый круг, другой комплексной плоскости, с центром в начале координат. При таком отображении уравнение приведено к наиболее простому и удобному для исследования виду. Доказано, что логарифмический полюс практически не влияет на асимптотическое поведение решения, а также доказано существование погранслойной области и области притяжения.

Abstract. A singularly perturbed equation with a logarithmic pole is considered. The task is to investigate the asymptotic behavior of the solution and the influence of the pole on the solution. The problem is solved by applying a conformal mapping of some neighborhood of the logarithmic pole to a closed disk in another complex plane, with the center at the origin. Under such a mapping, the equation is reduced to the simplest form convenient for investigation. It is proven that the logarithmic pole practically does not affect the asymptotic behavior of the solution, and the existence of a boundary layer region and a domain of attraction is also proven.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, асимптотика, логарифмический полюс, погранслойная область, область притяжения, конформное отображение, последовательное приближения, асимптотические оценки.

Keywords: singular perturbation, asymptotics, logarithmic pole, boundary layer region, domain of attraction, conformal mapping, successive approximations, asymptotic estimates.

Постановка задачи

Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений сводится к исследовании функций [1-6]. Пусть рассматривается уравнение:

$$\varepsilon x' = \frac{a'(t)}{a(t)} x + \varepsilon(b(t) + f(t, x)), \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ -малый вещественный параметр; $t \in D \subset C$ и C — некоторый открытый круг, C — комплексная плоскость. Пусть выполняются условия:

У1. $a(t), b(t) \in Q(D)$ — пространство аналитических функций в D

У2. $\exists! T_0 \in D (a(T_0) = 0, a'(T_0) \neq 0)$.

У3. $f(t, x) \in Q(H), H = \{(t, x), t \in D, |x| \leq C_1\}, f(t, x) \equiv 0$.

У4. $\forall (t, \tilde{x}), (t, \tilde{\tilde{x}}) \in H (|f(t, \tilde{x}) - f(t, \tilde{\tilde{x}})| \leq C_2 |\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}|)$.

Здесь и далее буквами $C_1, C_2, \dots$ будем говорить, что уравнение (1) имеет логарифмический полюс.

Задача. Исследовать асимптотическое поведение решение задачи (1)–(2) и влияние логарифмического полюса.

Решение задачи

Задачу (1)–(2) заменим следующее:

$$x = x^0 \exp \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{a(t)}{a(t_0)} + \int_{t_0}^t (b(\tau) + f(\tau, x)) \exp \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{a(t)}{a(\tau)} d\tau. \quad (3)$$

в (3) проведем преобразование:

$$u = a(t). \quad (4)$$

Согласно У1 и У2 преобразование (4) конформно и взаимнооднозначно. Из (4) определяем

$$t = \varphi(u). \quad (5)$$

Теперь (3) можем записать так

$$y = x^0 \exp \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{u}{u^0} + \int_{u^0}^u (b_0(\tilde{u}) + f_0(\tilde{u}, y)) \exp \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{u}{\tilde{u}} d\tilde{u}, \quad (6)$$

где

$$y(u, \varepsilon) \equiv x(\varphi(u), \varepsilon), u_0 = a(t_0), b_0(\tilde{u}) \equiv b(\varphi(\tilde{u})) \cdot \varphi'(\tilde{u}), \\ f_0(\tilde{u}, y) \equiv f(\varphi(\tilde{u}), x(\varphi(\tilde{u}), \varepsilon)).$$

При отображении (5) некоторая замкнутая окрестность точки T_0 отображается в некоторый замкнутый круг H плоскости и с центром в точке $(0; 0)$. Точка T_0 отображается в точку $(0; 0)$.

Таким образом поставленную задачу будем решать для уравнения (6) в круге H .

Заметим, линиями уровня функции $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, в круге H являются концентрические окружности с центром в точке $(0; 0)$.

Пусть границей H будет окружность радиуса r_0 . Проведем круг H_1 с радиусом $r_1 = \sqrt{r_0^2 + \varepsilon \ln \varepsilon}$.

Введем обозначение $H \setminus H_1 = H_\varepsilon$, причем будем считать, что граница H_1 не принадлежит H_ε (Рисунок).

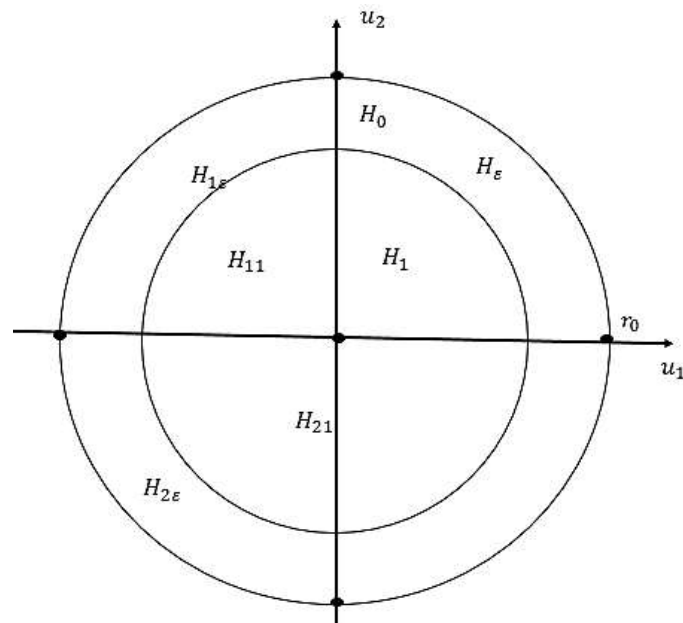


Рисунок. Области $H_1, H_\varepsilon, H_{23}, H_{21}, H_{1\varepsilon}, H_{11}$

Верхнюю границу (содержащегося в полуплоскости $u_2 \geq 0$) H обозначим l_1 , а нижние части $H_{2\varepsilon}, H_{21}$. (Рисунок).

За u_0 возьмём r_0 т.е. $u_0 = r_0$.

Для удобства проводимых вычислений в (6) перейдем к полярным координатам:

$$u = re^{i\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Теперь (6) перепишем так:

$$y = x^0 \left(\frac{re^{i\alpha}}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_{(r_0;0)}^{(r;\alpha)} (b_0(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}, y)) \times \left(\frac{r}{\tilde{r}} e^{i(\alpha-\tilde{\alpha})} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} d(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}). \quad (7)$$

(7) рассмотрим в H . Сначала рассмотрим следующие случаи:

1. $(r; \alpha) \in l_1$, 2. $(r; \alpha) \in H_{1\varepsilon}$, 3. $(r; \alpha) \in H_{11}$.

К (7) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$y_m = x^0 \left(\frac{re^{i\alpha}}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_{(r_0;0)}^{(r;\alpha)} (b_0(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}, y_{m-1})) \times \left(\frac{r}{\tilde{r}} e^{i(\alpha-\tilde{\alpha})} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} d(\tilde{r}e^{i\tilde{\alpha}}), \quad (8)$$

$$y_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots$$

Для (8) определим пути интегрирования. Для всех y_m и случаев 1, 2, 3 путь идёт от точки $(r_0; 0)$ до $(r_0; \alpha)$ по l_1 , затем по лучу проходящего через точки $(0; 0)$ и $(r_0; \alpha)$ от точки $(r_0; \alpha)$ до точки $(r; \alpha)$ ($r \leq r_0$). Теперь переходим к оценке (8). Сначала рассмотрим случай 1. Имеем:

$$y_1 = x^0 e^{\frac{i\alpha}{\varepsilon}} + \int_0^\alpha b_0(r_0, e^{i\tilde{\alpha}}) e^{\frac{i(\alpha-\tilde{\alpha})}{\varepsilon}} i r_0 e^{i\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha}.$$

Отсюда переходя к модулю получим $|y_1| \leq C_3$.

Далее $|y_2| \leq |y_1| + C_2 C_3 \alpha \leq C_3(1 + C_2 C_3 \alpha)$.

Продолжив процесс имеем

$$|y_m| \leq C_3 \left(1 + C_2 C_3 \alpha + \dots + \frac{(C_2 C_3 \alpha)^{m-1}}{(m-1)!} \right), m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Из (9) следует оценка:

$$|y_m| \leq C_4, C_4 = C_3 e^{C_2 C_3 \pi}, (r; \alpha) \in l_1. \quad (10)$$

Докажем равномерную сходимость (8) для случая 1. Оценим $|y_m - y_{m-1}|$.

$$\begin{aligned} |y_1| &\leq C_4; \\ |y_2 - y_1| &\leq C_4 C_3 \alpha; \\ |y_3 - y_2| &\leq C_4 C_3 C_3 \frac{\alpha^2}{2!} = C_4 \frac{(C_3 \alpha)^2}{2!}; \\ |y_m - y_{m-1}| &\leq C_4 \frac{(C_3 \alpha)^{m-1}}{(m-1)!}, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Из оценки (11) вытекает равномерная сходимость (8) к некоторой функции $y(r, \alpha, \varepsilon)$, которая является решением (7) для $(r, \alpha) \in l_1$ и для этого решения, согласно (10), справедлива оценка

$$|y| \leq C_4, (r; \alpha) \in l_1. \quad (12)$$

Случай 2. В (7) проведем следующее преобразование (с учетом выбранных путей интегрирования):

$$\begin{aligned} y = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} &\left[(x^0 e^{i\tilde{\alpha}})^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_0^{\tilde{\alpha}} ((b_0(r_0 e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(r_0 e^{i\tilde{\alpha}}, y) \times e^{\frac{i(\tilde{\alpha}-\alpha)}{\varepsilon}} d(\tilde{r} e^{i\tilde{\alpha}})) \right] + \\ &+ \int_r^{r_0} (b_0(\tilde{r}, e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(\tilde{r} e^{i\tilde{\alpha}}, y) \times \left(\frac{r}{\tilde{r}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\tilde{\alpha}} d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) выражение, содержащееся в скобке [...] даёт решение (7) на l_1 . Таким образом (13) можем переписать так:

$$y = y(r_0 e^{i\tilde{\alpha}}, \varepsilon) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_r^{r_0} (b_0(\tilde{r}, e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(\tilde{r} e^{i\tilde{\alpha}}, y)) \times \left(\frac{r}{\tilde{r}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\tilde{\alpha}} d\tilde{r}. \quad (14)$$

К (14) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$\begin{aligned} y_m = y(r_0 e^{i\tilde{\alpha}}, \varepsilon) &\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_r^{r_0} (b_0(\tilde{r}, e^{i\tilde{\alpha}}) + f_0(\tilde{r} e^{i\tilde{\alpha}}, y_{m-1})) \times \left(\frac{r}{\tilde{r}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{i\tilde{\alpha}} d\tilde{r}. y_0 \equiv 0, m \\ &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим (15).

$$|y_1| \leq C_4 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + \left| \int_r^{r_0} |b_0(\tilde{r}, e^{i\tilde{\alpha}})| \left(\frac{r}{\tilde{r}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} d\tilde{r} \right| \leq C_4 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + C_5 \varepsilon;$$

По условию $\sqrt{r_0^2 + \varepsilon \ln \varepsilon} < r \leq r_0$. Таким образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} &\leq 1, \text{ тогда } |y_1| \leq C_4 + C_5 \varepsilon \leq C_6; \\ |y_2| &\leq |y_1| + C_6 \cdot C_5 \varepsilon = C_6(1 + C_5 \varepsilon); \\ |y_3| &\leq |y_1| + C_6 \cdot \left(C_5 \varepsilon + \frac{(C_5 \varepsilon)^2}{2!}\right) = C_6 \cdot \left(1 + C_5 \varepsilon + \frac{(C_5 \varepsilon)^2}{2!}\right). \end{aligned}$$

Продолжая оценку получим

$$y_m \leq C_6 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(C_5 \varepsilon)^k}{k!} < C_6 \exp C_5 \varepsilon \leq C_7, \quad y_m \leq C_7, (r, \alpha) \in H_{1\varepsilon}. \quad (16)$$

Сходимость $\{y_m\}$ доказывается как и в предыдущем случае. Имеем оценку:

$$|y| \leq C_7, (r; \alpha) \in H_{1\varepsilon}. \quad (17)$$

Пусть $(r; \alpha) \in H_{11}$. В рассматриваемом случае, $r < r_0$ и

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ т.е. } \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = O(\varepsilon^n), n \in N.$$

Учитывая это и повторяя предыдущие процедуры оценки $|y_m|$ получим

$$|y_m| \leq C_8 \varepsilon, (r; \alpha) \in H_{11}. \quad (18)$$

Сходимость $\{y_m\}$ доказывается как и в первом случае. Для решения y получается оценка (на основе (18)):

$$|y| \leq C_8 \varepsilon, (r; \alpha) \in H_{11}. \quad (19)$$

Объединив оценки (12), (16), (19) получим:

$$|y| \leq C_9 \begin{cases} 1, (r; \alpha) \in l_1 \cup H_{2\varepsilon}; \\ \varepsilon, (r; \alpha) \in H_{11}. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогичная оценка имеет место для $l_2, H_{2\varepsilon}, H_{21}$ т.е.:

$$|y| \leq C_9 \begin{cases} 1, (r; \alpha) \in l_2 \cup H_{2\varepsilon}; \\ \varepsilon, (r; \alpha) \in H_{21}. \end{cases} \quad (21)$$

Объединив оценки (20), (21) получим

$$|y| \leq C_9 \begin{cases} 1, (r; \alpha) \in l \cup H_3; l = l_1 \cup l_2; \\ \varepsilon, (r; \alpha) \in H_1. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, из проведенных операций вытекает, что логарифмический полюс на асимптотическое поведение решения никакого влияния не оказывает. Теперь вернемся к задаче (1)-(2). Из (22) вытекает, что в окрестности точки T_0 (эта окрестность отображается на H) существуют погранслоиная область и область притяжения и логарифмический полюс T_0 на асимптотическое поведение никакого влияния не оказывает.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть рассматривается задача (1)-(2) и выполняются условия Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

Тогда решение задачи (1)-(2) существует в некоторой окрестности точки T_0 и эта окрестность разделяется на погранслоиную область и область притяжения. Логарифмический полюс на асимптотическое поведение решения не влияет.

Список литературы:

1. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром // Труды Математического института имени ВА Стеклова. 1985. Т. 169. №0. С. 99-118.
2. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31. №3. С. 575-586.
3. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 207 с.
5. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
6. Алыбаев К. С., Эрматали уулу Б. Функции комплексных переменных с большими параметрами, построение областей // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №10. С. 11-16. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01>
7. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.
8. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №2. С. 226-233.
9. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.
10. Панков П. С., Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б., Нарбаев М. Р. Явление погранслоинных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. 2013. Т. 1. С. 227-231.
11. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К. Области притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений при различных начальных значениях // Евразийское Научное Объединение. 2021. №6-1. С. 1-6.
12. Турсунов Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений: дисс. ... д-р физ-мат. наук. Ош, 2014. 192 с.
13. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К., Матанов Ш. М., Эрматали уулу Б. Сравнительный анализ методов асимптотической оценки интегралов содержащих большой параметр // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 19-30. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02>

References:

1. Pontryagin, L. S., & Mishchenko, E. F. (1985). Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni VA Steklova*, 169(0), 99-118. (in Russian).
2. Tikhonov, A. N. (1952). Sistemy differentsial'nykh uravnenii, soderzhashchie malye parametry pri proizvodnykh. *Matematicheskii sbornik*, 31(3), 575-586. (in Russian).

3. Mishchenko, E. F., & Rozov, N. Kh. (1975). *Differentsial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya*. Moscow. (in Russian).
4. Vasil'eva, A. B., & Butuzov, V. F. (1990). *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushchenii*. Moscow. (in Russian).
5. Imanaliev, M. I. (1972). *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarno vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem*. Frunze. (in Russian).
6. Alybaev, K. & Ermatali uulu, B. (2024). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice*, 10(10), 11-16. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01>
7. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk*, 209(3), 576-579. (in Russian).
8. Neishtadt, A. I. (1988). O zatyagivani poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. II. *Differentsial'nye uravneniya*, 24(2), 226-233. (in Russian).
9. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU*, 3, 190-200. (in Russian).
10. Pankov, P. S., Alybaev, K. S., Tampagarov, K. B., & Narbaev, M. R. (2013). Yavlenie pogransloinykh linii i asimptotika reshenii singulyarno vozmushchennykh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Vestnik OshGU*, 1, 227-231. (in Russian).
11. Alybaev, K. S., & Narymbetov, T. K. (2021). Oblasti prityazheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri razlichnykh nachal'nykh znacheniyakh. *Evraziiskoe Nauchnoe Ob"edinenie*, (6-1), 1-6. (in Russian).
12. Tursunov, D. A. (2014). *Assimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennykh obyknovennykh i elipticheskikh differentsial'nykh uravnenii*: diss. ... d-r fiz-mat. nauk. Osh. (in Russian).
13. Alybaev, K, Narymbetov, T., Matanov, S., Ermatali uulu, B. (2025). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice*, 11(2), 19-30. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02>

Поступила в редакцию
18.10.2025 г.

Принята к публикации
25.10.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Эрматали уулу Б. Сингулярно возмущенные уравнения с особенностями в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №11. С. 12-18. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01>

Cite as (APA):

Ermatali uulu, B. (2025). Singularly Perturbed Equations with Singularities in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice*, 11(11), 12-18. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01>