УДК 577.3.01(0.75) https://doi.org/10.33619/2414-2948/117/05
AGRIS L20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ХИЩНИКОВ И ЖЕРТВ

©Гончарова А. Б., *ORCID: 0000-0002-7980-1657, SPIN-код: 7469-7779, канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия, goncharovaab@yandex.ru*
©Колпак Е. П., *ORCID: 0000-0001-6956-4814, SPIN-код: 3611-8302, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия, petrovich_pmpu@mail.ru*
©Гасратова Н. А., *ORCID: 0000-0003-4817-327X, SPIN-код: 2548-2997, канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия, n.gasratova@spbu.ru*

MATHEMATICAL MODELING PREDATOR-PREY INTERACTIONS

©Goncharova A., *ORCID: 0000-0002-7980-1657, SPIN code: 7469-7779, Ph.D., St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, goncharovaab@yandex.ru*
©Kolpak E., *ORCID: 0000-0001-6956-4814, SPIN code: 3611-8302, Dr. habil., St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, petrovich_pmpu@mail.ru*
©Gasratova N., *ORCID: 0000-0003-4817-327X, SPIN- code: 2548-2997, Ph.D. St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, n.gasratova@spbu.ru*

Аннотация. Исследуется система сообщество различных видов хищников и сообщество различных видов их жертв. Рассматриваются системы жертва – два хищника, две жертвы и один хищник. Предлагается модель взаимодействия сообществ заданного количества жертв и заданного количества хищников. Модели представлены задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Задание начальных данных определятся концепцией первичности возникновения жертв. В рамках имитационного моделирования продемонстрировано, что в эволюционном процессе возможна гибель групп хищников и групп жертв.

Abstract. The work explores the system of a community of different types of predators and a community of different types of their victims. The victim systems are considered – two predators, two victims and one predator. A model of community interaction between a given number of victims and a given number of predators is proposed. The models are represented by Cauchy problems for systems of ordinary differential equations. The setting of the initial data is determined by the concept of the primary occurrence of victims. Within the framework of simulation modeling, it is demonstrated that the death of groups of predators and groups of victims is possible in the evolutionary process.

Ключевые слова: особи, популяция, устойчивость, хищник, жертва, сообщество, миграция, положение равновесия, подвижность.

Keywords: individuals, population, stability, predator, prey, community, migration, equilibrium position, mobility.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 11. №8 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/117

Взаимодействие типа хищник-жертва возникло давно. Эволюция хищников и жертв взаимосвязана: у хищника вырабатывались эффективные средства нападения, а у жертв — защиты. У хищников изменялась база трофического ресурса, а жертвы могли «уйти» от некоторых видов хищника, и стать жертвами других. При взаимодействии друг с другом происходила и гибель некоторых видов, как жертв, так и хищников.

Математические модели хищник-жертва учитывают, как правило, парные взаимодействия 1-2 видов хищников и жертв [1, 2].

Одна из первых моделей Лотки-Вольтерра учитывала взаимодействие один хищник - одна жертва, и предсказывала колебания численности обоих видов [2, 3]. В дальнейшем были разработаны модели, учитывающие различных факторы присущие реальным взаимодействиям с учетом влияния внешних факторов и пространственных распределений, миграционных характеристик [4].

В работе прорабатывается вариант взаимодействия нескольких видов хищников и нескольких видов жертв. Система считается свободно распределенной [5], замкнутой — миграция с сопредельных территорий не учитывается [6], образованием внутренних структур и диффузионными процессами пренебрегается [7-9].

Математическая модель

Модель Вольтерра [1] одна из первых объясняет временную цикличность численностей жертв и хищников. В модели в отсутствие хищника численность жертвы неограниченно растет. Введение внутривидовых потерь у жертв в модель Вольтерра в варианте, предложенном в [2, 3], приводит к модели из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \mu u\left(1-u-\alpha v\right), \\ \frac{dv}{dt} &= -\gamma v(1-\beta u), \end{aligned} \tag{1}$$

где u — численность жертвы, v — численность хищника, μ — удельная скорость роста численности жертв, параметры γ , α , β характеризуют скорости изменения численности особей.

Тривиальная точка притяжения системы уравнений (1) $u=0$ и $v=0$ является неустойчивой, а точка $u=1$ и $v=0$ будет устойчивой при выполнении условия $\beta<1$.

Третья неподвижная точка:

$$u=1/\beta \text{ и } v=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

существует при выполнении условия $\beta>1$, и будет устойчивой, поскольку корни характеристического полинома:

$$\lambda^2+\frac{\mu}{\beta}\lambda+\gamma\mu\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=0$$

матрицы Якоби правой части уравнений (1) в этой точке лежат в левой части комплексной плоскости.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 11. №8 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/117

Условия при $t=0$ $u=1$ и $v=\varepsilon$, предполагают, что в начальный момент времени с жертвой начинает взаимодействовать малое количество хищников. Этим учитывается тот факт, что хищник не может появиться прежде жертвы.

Жертва проходит в процессе эволюции специализацию, имеет то преимущество, что отсутствует специфический для нее хищник. Соответственно модель (1) допускает существование жертвы как одиночной популяции, и гибель хищника в случае малой скорости его размножения.

Жертва – два хищника

Такая модель с учетом (1) представлена системой трех уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\mu u\left(1-u-\alpha_1 v_1-\alpha_2 v_2\right),\\ \frac{dv_1}{dt}&=-\gamma_1 v_1(1-\beta_1 u),\\ \frac{dv_2}{dt}&=-\gamma_2 v_2(1-\beta_2 u),\end{aligned} \qquad (2)$$

где v_1 и v_2 численности хищников.

Неподвижными точками уравнений (2) могут быть или

1. $u_1=1/\beta_1$, $v_1=\frac{1}{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{\beta_1}\right)$, $v_2=0$,

или

2. $u_2=1/\beta_2$, $v_1=0$, $v_2=\frac{1}{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{\beta_2}\right)$.

То есть один из хищников должен погибнуть.

Для первой точки собственные значения матрицы Якоби

$$\lambda_1=\gamma_2\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right),$$

$$\lambda_2=-\mu u_1+\sqrt{\left(\mu u_1\right)^2-\alpha_1\mu\gamma_1 v_1},$$

$$\lambda_3=-\mu u_1-\sqrt{\left(\mu u_1\right)^2-\alpha_1\mu\gamma_1 v_1}$$

будут иметь отрицательные вещественные части при выполнении неравенств $\beta_2>\beta_1$.

Вторая стационарная точка будет реализовываться, если $\beta_1>\beta_2$.

Таким образом, из двух хищников в модели (2) выживает тот, у которого на воспроизводства потомства требуется меньшее количество жертв.

Две жертвы и один хищник

Модель две жертвы и один хищник представлена системой трех уравнений

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 11. №8 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/117

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \mu_1 u_1 (1 - u_1 - \alpha_1 v), \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu_2 u_2 (1 - u_2 - \alpha_2 v), \\ \frac{dv}{dt} &= -\gamma v(1 - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2),\end{aligned} \quad (3)$$

где u_1 и u_2 — численности жертв, v — численность хищника.

Вселение хищника в зону установившегося проживания будущих жертв соответствует неподвижная точка

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ v = 0.$$

Характеристическими значения матрицы Якоби в этой неподвижной точке будут

$$\lambda_1 = -\mu_1,\ \lambda_2 = -\mu_2,\ \lambda_3 = -\gamma(1 - \beta_1 - \beta_2).$$

Эта точка будет неустойчивой, если выполняется неравенство

$$1 < \beta_1 + \beta_2.$$

Последнее неравенство соответствует требованию высокой скорости переработки жертв хищником, является условием выживания малочисленного хищника.

Координаты точки системы уравнений (3), в которой совместно существуют и жертвы и хищник

$$v = \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2},\ u_1 = 1 - \alpha_1 v,\ u_2 = 1 - \alpha_2 v.$$

Эта неподвижнаяя точка реализуется при одновременном выполнении неравенств

$$\beta_1 + \beta_2 > 1, \quad \alpha_1 v < 1, \quad \alpha_2 v < 1.$$

В этой модели при выполнении первого неравенства хищник не погибает, а одна из жертв может погибнуть при некоторых значениях параметров, входящих в систему уравнений (3).

Сообщества

Эволюция живого мира сопровождалась постоянным появлением новых видов и гибелью уже существовавших. У хищников изменялся трофический ресурс. Специализация хищников к каждой жертве начинается, когда жертва становится специализированной, набирает достаточную численность и биомассу. Постепенно трофический ресурс хищников расширяется, а жертвы становится трофическим ресурсом различных хищников. В результате формируется сообщество хищников и сообщество их жертв.

Пусть n различных видов жертв являются трофическим ресурсом для m различных видов хищников. Пусть их парные взаимоотношения описываются системой уравнений (1). С учетом этого модель одновременного взаимодействия всех хищников и всех жертв принимает вид ($i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$):

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 11. №8 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/117

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \mu_i u_i \left(1 - u_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j\right), \\ \frac{dv_j}{dt} &= -\gamma_j v_j \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} u_i\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где u_i - численность i-ой жертвы ($i = 1,2,...,n$), v_j — численность j-ого хищника ($j = 1,2,...,m$), μ_i — удельные скорости роста численности жертв, γ_j — удельные скорость гибели хищников, α_{ij} — параметр, характеризующий скорость уничтожения i-ой жертвы j-м хищником, β_{ji} — параметр, характеризующий скорость размножения j-го хищника при «поедании» i-й жертвы.

К системе уравнений (4) добавляются начальные условия при $t = 0$:

$$u_i = 1 \ (i = 1,2,...,n) \text{ и } v_j = \varepsilon_j \ (\varepsilon_j \ll 1) \ (j = 1,2,...,m).$$

В отсутствие хищников ($v_j = 0$, $j = 1,2,...,m$) жертвы не взаимодействуют между собой, представляют собой изолированные популяции с неустойчивой тривиальной неподвижной точкой, и устойчивой точкой $u_i = 1$ ($i = 1,2,...,n$).

В неподвижной точке $u_i = 1$ ($i = 1,2,...,n$) и $v_j = 0$ ($j = 1,2,...,m$) скорость роста численности хищников описывается уравнениями:

$$\frac{dv_j}{dt} = -\gamma_j v_j \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji}\right).$$

Соответственно для j-го хищника будет положительной, если выполняется условие:

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} \tag{5}$$

Как и для модели (1) для выживаемости малочисленной популяции хищника суммарная переработка j-м хищником всех жертв должна превышать пороговое значение, определяемое неравенством (5).

Нетривиальна стационарная точка системы уравнений (4) находится как решение системы линейных алгебраических уравнений ($i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$):

$$\begin{aligned} u_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j &= 1, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} u_i &= 1, \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$\begin{pmatrix} E & \alpha \\ \beta & \mathrm{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1,$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

где α — матрица коэффициентов α_{ij} размерности $n \times m$, β — матрица коэффициентов β_{ji} размерности $m \times n$, E — единичная матрица размерности $n \times n$, O — матрица размерности $m \times m$, состоящая из нулей.

Физический смысл имеет решение системы уравнений (6) с положительными компонентами u_i и v_j. Отрицательные значения этих компонент можно рассматривать как «гибель» хищников или жертв.

Численное решение системы уравнений (4) эффективно строится в среде математического пакета MatLab, в котором реализована векторизация вычислений, позволяющая сократить продолжительность вычислений. Имитационная модель основана на случайном выборе параметров модели (4) из заданного диапазона. Для случая N вариантов выбора параметров строятся вероятности распределений. Распределение хищников и их жертв строилось при случайном выборе параметров из диапазонов: $\mu \in [1,3]$, $\gamma \in [0.02, 0.04]$, $\alpha \in [1,2]$, $\beta \in [1,2]$. На Рисунке для случая, когда в начальный момент в группу $n = 20$ жертв вселяется группа из $m = 20$ хищников, приведено распределение видов «выживших» хищников и жертв для $N = 5000$. Вертикальными пунктирными линиями отмечены медианы распределений. Как следует из полученных результатов при взаимодействии хищников и жертв их общее количество уменьшается — часть видов не выживает.

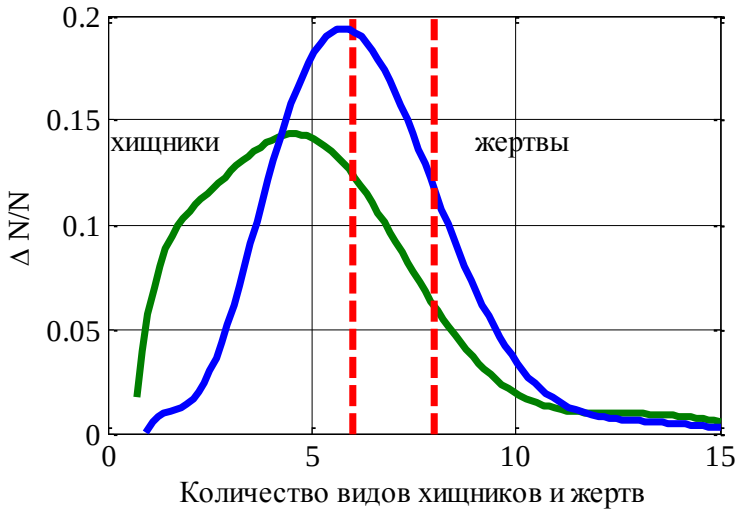

Рисунок. Распределение выживших хищников и жертв

Заключение

Анализ результатов моделирования показал, что взаимодействие сообществ хищников и сообществ их жертв может сопровождаться гибелью отдельных групп как хищников, так и жертв. Сохранение начального количества видов и жертв в длительном эволюционном процессе маловероятно. Большие потери в видовом составе может понести сообщество хищников по сравнению с сообществом жертв. Разработанная модель сообществ отражает возможные вероятностные распределения для видов, существующих на ограниченной территории.

Список литературы:

1. Murray D. D. Mathematical biology. N.Y. Springer. 2002. 551 p.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

2. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 368 с.

3. Бигон М., Харпер Д., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989. Т. 1. 667 с. Т. 2. 477с.

4. Гиричева Е. Е. Влияние направленных перемещений хищника на формирование пространственных структур в модели трехвидового сообщества с учетом всеядности хищника // Компьютерные исследования и моделирование. 2023. Т. 15. № 6. С. 1617-1634. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-6-1617-1634

5. Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник-жертва // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69. № 2. С. 237-249. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249

6. Курилова Е. В., Фрисман Е. Я. Моделирование динамики взаимодействующих популяций типа "хищник-жертва" при постоянной миграции особей с сопредельных территорий // Региональные проблемы. 2024. Т. 27. № 1. С. 62-77.

7. Мысленков А. И., Волошина И. В., Шурыгина А. А., Керли Л. Л. Местообитания, распространение и численность амурской рыси *Lynx lynx stroganovi* и дальневосточного лесного кота *Prionailurus bengalensis euptilura* в Лазовском заповеднике и национальном парке "Зов тигра" (Приморский край, Дальний Восток России) // Биота и среда природных территорий. 2023. Т. 11. №3. С. 27-52.

8. Гончарова А. Б., Колпак Е. П., Гасратова Н. А. Нелинейная диффузия популяции // Наука и бизнес: пути развития. 2025. №3(165). С. 24-29.

9. Гончарова А. Б., Колпак Е. П., Гасратова Н. А. Камерная модель хищник-жертва на кольцевом ареале // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 45-50. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/05

References:

1. Murray, D. D. (2002). Mathematical biology. N.Y. Springer.

2. Bazykin, A. D. (2003). Nelineinaya dinamika vzaimodeistvuyushchikh populyatsii. Moscow. (in Russian).

3. Bigon, M., Kharper, D., & Taunsend, K. (1989). Ekologiya. Osobi, populyatsii i soobshchestva. Moscow. (in Russian).

4. Giricheva, E. E. (2023). Vliyanie napravlennykh peremeshchenii khishchnika na formirovanie prostranstvennykh struktur v modeli trekhvidovogo soobshchestva s uchetom vseyadnosti khishchnika. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie, 15*(6), 1617-1634. (in Russian). https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-6-1617-1634

5. Zelenchuk, P. A., & Tsibulin, V. G. (2023). Matematicheskaya model' ideal'nogo svobodnogo raspredeleniya v sisteme khishchnik — zhertva. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya, 69*(2), 237-249. (in Russian). https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249

6. Kurilova, E. V., & Frisman, E. Ya. (2024). Modelirovanie dinamiki vzaimodeistvuyushchikh populyatsii tipa “khishchnik–zhertva” pri postoyannoi migratsii osobei s sopredel'nykh territorii. *Regional'nye problemy, 27*(1), 62-77. (in Russian).

7. Myslenkov, A. I., Voloshina, I. V., Shurygina, A. A., & Kerli, L. L. (2023). Mestoobitaniya, rasprostranenie i chislennost' amurskoi rysi Lynx lynx stroganovi i dal'nevostochnogo lesnogo kota Prionailurus bengalensis euptilura v Lazovskom zapovednike i

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

natsional'nom parke "Zov tigra" (Primorskii krai, Dal'nii Vostok Rossii). *Biota i sreda prirodnykh territorii*, *11*(3), 27-52. (in Russian).

8. Goncharova, A. B., Kolpak, E. P., & Gasratova, N. A. (2025). Nelineinaya diffuziya populyatsii. *Nauka i biznes: puti razvitiya*, (3(165)), 24-29. (in Russian).

9. Goncharova, A., Kolpak, E., & Gasratova, N. (2025). The Predator-Prey Compartment Model in the Ring Area. *Bulletin of Science and Practice*, *11*(2), 45-50. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/05

Работа поступила
в редакцию 30.06.2025 г.

Принята к публикации
07.07.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Гончарова А. Б., Колпак Е. П., Гасратова Н. А. Математическое моделирование взаимодействия хищников и жертв // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №8. С. 39-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/117/05

Cite as (APA):

Goncharova, A., Kolpak, E., & Gasratova, N. (2025). Mathematical Modeling Predator-Prey Interactions. *Bulletin of Science and Practice*, *11*(8), 39-46. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/117/05

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)