

УДК 517.85, 534.83

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/03>

ПРИМЕНЕНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА С ДИСКАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА

©Сафина Г. Ф., ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-код: 4562-2453,
канд. физ.-мат. наук, Уфимский университет науки и технологий,
г. Нефтекамск, Россия, safinagf@mail.ru

©Коняев Ю. С., Уфимский университет науки и технологий,
г. Нефтекамск, Россия, elize.none@yandex.ru

APPLYING MATHEMATICAL PACKAGE TO NUMERICAL METHOD OF SOLVING SHAFT OSCILLATION PROBLEM WITH DISKS

©Safina G., ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-code: 4562-2453, Ph.D.,
Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia, safinagf@mail.ru

©Konayev Yu., Ufa University of Science and Technology,
Neftekamsk, Russia, elize.none@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена одна из форм численного решения задачи поиска частот свободных крутильных колебаний вала с дисками. Приведено практическое решение задачи с помощью матричной формы численного метода. На примере вала с пятью дисками рассмотрен пример использования матричной формы к расчету частот колебаний вала. К алгоритму решения задачи составлена программная реализация в математическом пакете Maple.

Abstract. One of the forms of numerical solution of the problem of finding frequencies of free torsional oscillations of a shaft with disks is considered in the paper. A practical solution to the problem is given using the matrix form of the numerical method. On the example of a shaft with five disks, an example of using a matrix shape for calculating the vibration frequencies of the shaft is considered. The algorithm for solving the problem has a software implementation in the Maple mathematical package.

Ключевые слова: вал с дисками, частоты колебаний, численный метод, матричная форма, алгоритм решения, пакет Maple.

Keywords: shaft with disks, vibration frequencies, numerical method, matrix form, solution algorithm, Maple package.

Рассмотренная в работе задача продолжает исследования в вибродиагностике динамических систем по их акустическому отклику [1–4].

Подобные обратные спектральные задачи невозможно исследовать без решения аналогичных прямых спектральных задач — задач поиска частот свободных колебаний таких систем [5–7].

Исследования по крутильным колебаниям вала с конечным числом насаженных дисков рассмотрены во многих работах по теории свободных колебаний, в том числе в работах [1, 5–8].

Поиск частот свободных колебаний многих механических систем (или их частей) с конечным числом степеней свободы часто приводит к образованию дифференциальных

уравнений или их систем, решение которых дает вековое уравнение задачи, решаемое затем численным методом. Для задачи крутильных колебаний вала с дисками подобным численным методом является метод Толле, который имеет различные формы [7–9].

В данной работе приведено использование матричной формы численного метода Толле для составления частотных уравнений для свободных крутильных колебаний вала с конечным числом дисков, а также дана программная реализация матричного метода с помощью математического пакета Maple на примере вала с пятью дисками

Для использования метода и его матричной формы вал с дисками заменяется на ряд безынерционных участков (Рисунок 1) с упругой податливостью e_i ($e_i = 1/k_i$, а $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ — жесткости участков вала), и приведенными массами (дисками) с моментами инерции $I_1, I_2, \dots, I_n$.

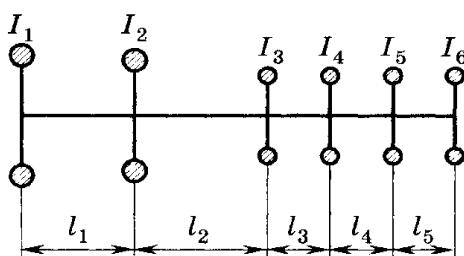


Рисунок 1. Приведенная схема вала с дисками к методу Толле

Метод Толле основан на следующих формулах [1, 8, 9]:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 1; \\ \theta_2 &= \theta_1 - e_1 p^2 I_1 \theta_1; \\ \theta_3 &= \theta_2 - e_2 p^2 (I_1 \theta_1 + I_2 \theta_2); \\ &\dots \\ \theta_n &= \theta_{n-1} - e_{n-1} p^2 (I_1 \theta_1 + \dots + I_{n-1} \theta_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в которых p — собственная частота крутильных колебаний вала, θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — угловые параметры безынерционных участков относительно приведенных масс.

Частотные уравнения методом Толле получены в работе [9] и имеют следующий общий вид для вала с n дисками:

$$I_1 p^2 \theta_1 + I_2 p^2 \theta_2 + I_3 p^2 \theta_3 + \dots + I_n p^2 \theta_n = 0 \quad (2)$$

Аналитическое решение уравнения (1), выраженного с помощью подстановок рекуррентных формул (1) приводит к проблеме нерациональных расчетов, поэтому к решению подобных задач удобно применить математические пакеты, например пакет Maple, обладающий широкими библиотеками и функциональными возможностями [10–13].

Приведем программную реализацию матричного метода в пакете Maple на конкретном примере с пошаговыми пояснениями используемых функций и опций пакета.

Рассмотрим вал с 5-ю дисками при известных моментах инерции $[H \cdot m \cdot c^2]$ масс дисков и погонных жесткостях $[H \cdot m]$ участков вала между дисками:

$$\begin{aligned} I_1 &= 10,78; \quad I_2 = 82,82; \quad I_3 = 14,27; \quad I_4 = 29,56; \quad I_5 = 21,66; \\ c_1 &= 10,48 \cdot 10^4; \quad c_2 = 34,80 \cdot 10^4; \quad c_3 = 24,40 \cdot 10^4; \quad c_4 = 40,60 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Необходимо найти при помощи матричной формы метода Толле соответствующие частоты колебаний вала.

Примем единицу податливости первого участка в виде: $e_1 = \frac{10^{-4}}{10,48} \left[\frac{1}{\text{кг}\cdot\text{м}} \right]$.

Для упрощения расчетов введем безразмерный параметр α , удовлетворяющий условию $p^2 = \alpha \cdot 10^4$. Тогда вместо $I_i p^2$ получим также безразмерные произведения $I_i \alpha \cdot 10^4 e_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$.

В итоге с учетом значения e_1 , имеем равенства:

$$\begin{aligned} I_1 p^2 &= 1,03\alpha, \quad I_2 p^2 = 7,90\alpha, \quad I_3 p^2 = 1,36\alpha, \\ I_4 p^2 &= 2,82\alpha, \quad I_5 p^2 = 2,07\alpha, \\ e_1 &= 1, \quad e_2 = 0,30, \quad e_3 = 0,43, \quad e_4 = 0,26. \end{aligned}$$

Приведем дальнейшую программную реализацию алгоритма в пакете Maple.

```
> restart;
> i1p2:=1.03*alpha; i2p2:=7.90*alpha; i3p2:=1.36*alpha; i4p2:=2.82*alpha;
i5p2:=2.07*alpha; e1:=1; e2:=0.30; e3:=0.43; e4:=0.26;
```

На экране получим числовые данные с присвоенными им соответствующими индикаторами:

```
i1p2 := 1.03 α i2p2 := 7.90 α i3p2 := 1.36 α i4p2 := 2.82 α i5p2 := 2.07 α e1 := 1
e2 := .30 e3 := .43 e4 := .26
```

Далее применяем рекуррентные формулы (1) матричной формы метода и постепенно получаем на экране выражения значений угловых параметров безынерционных участков через параметр α (при этом также присваиваем им индикаторы):

```
> t1:=1; t1 := 1
> t2:=t1-e1*i1p2*t1; t2 := 1 - 1.03 α
> t3:=t2-e2*i1p2*t1-e2*i2p2*t2; t3 := 1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α)
> t4:=t3-e3*i1p2*t1-e3*i2p2*t2-e3*i3p2*t3;
t4 := 1 - 1.7819 α - 5.7670 α (1 - 1.03 α)
- .5848 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α))
> t5:=t4-e4*i1p2*t1-e4*i2p2*t2-e4*i3p2*t3-e4*i4p2*t4;
t5 := 1 - 2.0497 α - 7.8210 α (1 - 1.03 α)
- .9384 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α)) - .7332 α (1 - 1.7819 α
- 5.7670 α (1 - 1.03 α) - .5848 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α)))
```

Полученные значения угловых параметров используем для дальнейшего составления частотного уравнения (2):

```
> y:=(i1p2*t1+i2p2*t2+i3p2*t3+i4p2*t4+i5p2*t5);
y := -1.03 α - 7.90 α (1 - 1.03 α) - 1.36 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α)) -
2.82 α (1 - 1.7819 α - 5.7670 α (1 - 1.03 α)
- .5848 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α))) - 2.07 α (1 - 2.0497 α
- 7.8210 α (1 - 1.03 α) - .9384 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α)) -
.7332 α (1 - 1.7819 α - 5.7670 α (1 - 1.03 α)
- .5848 α (1 - 1.3390 α - 2.3700 α (1 - 1.03 α))))
```

Далее при помощи функции «fsolve» находим все решения этого частотного уравнения относительно квадрата частоты в виде:

```
> p2:=10^4*fsolve(y,alpha);
p2 := 0., 3933.804910, 11153.99934, 31515.22971, 50666.64244
```

Присваиваем индикаторы полученным корням уравнения:

```
> s1:=0; s1 := 0  
> s2:=3933.804910; s2 := 3933.804910  
> s3:=11153.99934; s3 := 11153.99934  
> s4:=31515.22971; s4 := 31515.22971  
> s5:=50666.64244; s5 := 50666.64244
```

В итоге остается вычислить соответствующие значения собственных частот как корни квадратные из последних значений:

```
> s11:=sqrt(s1); s11 := 0 > s22:=sqrt(s2); s22 := 62.72005190  
> s33:=sqrt(s3); s33 := 105.6124961 > s44:=sqrt(s4); s44 := 177.5252932  
> s55:=sqrt(s5); s55 := 225.0925197
```

Таким образом, искомые значения частот колебаний следующие:

$$p_1 = 62,6 \text{ с}^{-1}, p_2 = 105,4 \text{ с}^{-1}, p_3 = 175,8 \text{ с}^{-1}, p_4 = 229,1 \text{ с}^{-1}$$

(и один нулевой корень, соответствующий общему вращению вала).

Приведенный пример показывает, что при помощи функций пакета Maple можно достаточно быстро реализовать алгоритмы решений многих задач, связанных с прямыми спектральными задачами.

Кроме того, проводить исследования зависимостей частот колебаний от различных параметров рассматриваемых систем (от массовых или жесткостных).

Список литературы:

1. Ahmadian H., Mottershead J. E., Friswell M. I. Boundary condition identification by solving characteristic equations // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 247. №5. P. 755-763. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3708>
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 592 с.
3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Ленанд, 2017. 416 с.
4. Вульфсон И. И. Динамика машин. Колебания. М.: Юрайт, 2017. 275 с.
5. Григорьев А. Ю., Григорьев К. А., Малявко Д. П. Колебания и виброактивность элементов машин. СПб., 2016. 136 с.
6. Зубарев Ю. М. Динамические процессы в технологии машиностроения. Основы конструирования машин. М.: Лань, 2021. 212 с.
7. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. М., 2003. 272 с.
8. Кельзон А. С. Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, 1977. 260 с.
9. Сафина Г. Ф. Исследование по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. 2011. №3. С. 51-65.
10. Сафина Г. Ф., Коняев Ю. С. Применение математического пакета Maple к поиску частот колебаний раздаточного редуктора // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 35-39. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/04>
11. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М., 2011. 208 с.
12. Маслов Г. С. Расчеты колебаний валов. М.: Машиностроение, 1980. 151 с.
13. Liu H. J., Hsu N. S., Lee T. H. Simultaneous identification of parameter, initial condition, and boundary condition in groundwater modelling // Hydrological Processes: An International Journal. 2009. V. 23. №16. P. 2358-2367. <https://doi.org/10.1002/hyp.7344>

References:

1. Ahmadian, H., Mottershead, J. E., & Friswell, M. I. (2001). Boundary condition identification by solving characteristic equations. *Journal of Sound and Vibration*, 247(5), 755-763. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3708>
2. Babakov, I. M. (2004). *Teoriya kolebanii*. Moscow. (in Russian).
3. Biderman, V. L. (2017). *Teoriya mekhanicheskikh kolebanii*. Moscow. (in Russian).
4. Vul'fson, I. I. (2017). *Dinamika mashin. Kolebaniya*. Moscow. (in Russian).
5. Grigor'ev, A. Yu., Grigor'ev, K. A., & Malyavko, D. P. (2016). *Kolebaniya i vibroaktivnost' elementov mashin*. St. Petersburg. (in Russian).
6. Zubarev, Yu. M. (2021). *Dinamicheskie protsessy v tekhnologii mashinostroeniya. Osnovy konstruirovaniya mashin*. Moscow. (in Russian).
7. Il'in, M. M., Kolesnikov, K. S., & Saratov, Yu. S. (2003). *Teoriya kolebanii*. Moscow. (in Russian).
8. Kel'zon, A. S. (1977). *Raschet i konstruirovanie rotornykh mashin*. Leningrad. (in Russian).
9. Safina, G. F. (2011). Issledovanie po krutyl'nym kolebaniyam vala s diskami. *Defektoskopiya*, (3), 51-65. (in Russian).
10. Safina, G., & Konyaev, Yu. (2024). Application of Maple Mathematical Package to Search for Transfer Gear Oscillation Frequencies. *Bulletin of Science and Practice*, 10(5), 35-39. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/04>
11. Kirsanov, M. N. (2011). *Praktika programmirovaniya v sisteme Maple*. Moscow. (in Russian).
12. Maslov, G. S. (1980). *Raschety kolebanii valov*. Moscow. (in Russian).
13. Liu, H. J., Hsu, N. S., & Lee, T. H. (2009). Simultaneous identification of parameter, initial condition, and boundary condition in groundwater modelling. *Hydrological Processes: An International Journal*, 23(16), 2358-2367. <https://doi.org/10.1002/hyp.7344>

Работа поступила
в редакцию 25.03.2025 г.

Принята к публикации
01.04.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Сафина Г. Ф., Коняев Ю. С. Применение к численному методу решения задачи колебаний вала с дисками математического пакета // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №6. С. 25-29. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/03>

Cite as (APA):

Safina, G., & Konyaev, Yu. (2025). Applying Mathematical Package to Numerical Method of Solving Shaft Oscillation Problem with Disks. *Bulletin of Science and Practice*, 11(6), 25-29. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/03>