УДК 519. 865.3: 004.42 https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/02

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ОБМЕНА К ПОИСКУ РАВНОВЕСНОЙ СИТУАЦИИ НА ПРИМЕРЕ ЗАМКНУТОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*©**Сафина Г. Ф.**, ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-код: 4562-2453, канд.физ.-мат.наук, Уфимский университет науки и технолологий, г. Нефтекамск, Россия,safinagf@mail.ru*
*©**Кириллова Е. А.**, Уфимский университет науки и технолологий, г. Нефтекамск, Россия, elize.none@yandex.ru*

USING THE EXCHANGE MATRIX TO FIND AN EQUILIBRIUM SITUATION USING THE EXAMPLE OF A CLOSED ECONOMIC SYSTEM

*©**Safina G.**, ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-code: 4562-2453, Ph.D., Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia,safinagf@mail.ru*
*©**Kirillova E.**, Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia, elize.none@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассмотрена матрица обмена для замкнутой экономической системы. Приведена математическая формулировка задачи. Исследован алгоритм нахождения равновесных ситуаций с использованием матрицы обмены. Получены условия определения равновесной ситуации для замкнутой экономической системы. Приведен и решен практический пример по данному алгоритму.

Abstract. The paper discusses the exchange matrix for a closed economic system. Mathematical formulation of the problem is given. An algorithm for finding equilibrium situations using an exchange matrix has been investigated. The conditions for determining the equilibrium situation for a closed economic system were obtained. A practical example of this algorithm is given and solved.

Ключевые слова: матрица обмена, равновесная ситуация, собственное значение, алгоритм решения.

Keywords: exchange matrix, equilibrium situation, eigenvalue, solution algorithm.

Применение матричного исчисления в различных сферах математики, физики, химии и т.д. широко известно [1–3]. Рассматривается матрица обмена и демонстрируется на конкретном примере ее практическое применение в экономике при нахождении равновесных ситуаций. Рассмотрим систему из n отраслей производства, каждая из которых выпускает продукцию одного вида. Объём продукции, которую выпускает каждая отрасль в рассматриваемом периоде, примем за единицу. Кроме того будем считать, что обмен продукции происходит только внутри системы, т.е. экономика замкнута. Тогда доли продукции, выпускаемой всеми *n* отраслями производства можно представить элементами квадратной матрицы *A*:

,

в которой принимаем, что a_{ij} — доля продукции j-й отрасли, которая поступает в i-ю отрасль. По предложенной выше экономической ситуации видим, что для матрицы A справедливы следующие условия:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, для $j=\overline{1,n}$;

2) $a_{ij} \geq 0$, для $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Первое условие означает, что вся продукция j-й отрасли предназначена для обмена внутри системы, а второе — говорит о не отрицательности элементов матрицы.

Такую квадратную матрицу, для которой выполняются оба условия принято называть матрицей обмена [1].

Итак, рассмотрим матрицу обмена и поставим следующую задачу: необходимо определить такие цены на продукцию каждой отрасли, при которых вся рассматриваемая экономическая система будет находиться в равновесии. Под равновесием будем понимать, что отрасли с своем производстве и продаже равноправны (равносильны), по-другому, ни одна из них не обогащается за счет другой.

Введем в рассмотрение следующие параметры:

x_i ($i=\overline{1,n}\overline{1,n}$) — цена одной единицы продукции i-й отрасли:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ — стоимость всей закупаемой ею продукции (расход i-й отрасли).

Для того чтобы i-ю отрасль могла существовать и развиваться, её расход не должен превышать дохода, т.е. стоимости произведённой ею продукции x_i. С учетом этого получаем ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq x_i, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{1}$$

При этом если искомые равновесные цены существуют, то система неравенств должна выполняться именно как система равенств. Покажем, что последнее утверждение верно.

Для этого совокупность всех цен x_i ($i=\overline{1,n}$) одной единицы продукции каждой отрасли рассмотрим как вектор цен $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (он и является искомым).

Пусть числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ удовлетворяют условию (1), тогда подставим их в неравенства и затем сложим их почленно. При этом получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^0 ; \qquad \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big) x_j^0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^0 ; \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^0 .$$

Но последнее неравенство с учетом условий 1 и 2 матрицы обмена справедливо только при выполнении знака равенства, т.е. $\sum_{j=1}^{n} x_j^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0$. Получили, что для чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ справедливы равенства: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = x_i^0, \quad i=\overline{1,n}$.

Тогда в математической формулировке поставленная экономическая задача сводится к нахождению вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором существует единственная равновесная ситуация, т.е.

$$A\bar{x} = \bar{x};$$
$$A\bar{x} - E\bar{x} = 0;$$
$$(A - E)\bar{x} = 0;$$
$$A - E = 0.$$

Последнее матричное равенство можно рассмотреть как $|A - 1 \cdot E| = 0$, а $1 = \lambda$, где λ — собственное значение матрицы A.

Проверим теперь, что $\lambda = 1$ действительно является собственным значением матрицы обмена, а для этого достаточно проверить, что $|A - \lambda E| = 0$ (где $\lambda = 1$), т.е.

$$|A - \lambda E| = |A - 1 \cdot E| = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Далее к первой строке прибавим все остальные строки и получим:

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} - 1 & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} - 1 & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} - 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Тогда элементы первой строки будут равны 0, т.к. в матрице обмена $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. В итоге получаем матрицу с нулевой строкой, которая по свойствам будет равна нулю:

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} - 1 & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} - 1 & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in} - 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, показали, что для матрицы обмена A собственное значение матрицы $\lambda = 1$, тогда остается найти соответствующий собственному значению собственный вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Найденный вектор и будет искомым неотрицательным вектором равновесных цен.

Приведем пример на нахождение такой равновесной ситуации: имеются 3 отрасли производства, каждая из которых выпускает один вид продукции. Система замкнута, и обмен внутри системы происходит в соответствии с данной матрицей обмена $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Определить вектор равновесных цен.

Найдём матрицу $A - E$: $A - E = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}7 \end{pmatrix}$.

Составим матричное равенство: $(A - E)\bar{x} = 0$, где $\bar{x}(x_1, x_2 x_3)$, т.е.

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & -0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее матричное равенство представим в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 = 0; \\ 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}1x_3 = 0; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}7x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что она имеет бесконечное множество решений в виде: $\bar{x} = \left(\frac{33}{28}C,\ \frac{8}{7}C,\ C\right)$ $C \in R$. Принимая $C = 28к$ $(к > 0)$, получим $\bar{x} = (33k,\ 32k,\ 28k)$.

Таким образом, равновесные цены на продукцию каждой отрасли: $x_1 = 33к,$ $x_2 = 32к,$ $x_3 = 28к$, в котором коэффициент $к$ можно рассматривать как множитель, связанный с денежной единицей.

Список литературы:

1. Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Орлова И. В. Экономико-математические методы и прикладные модели.. М.: Юрайт, 2013. 328 с.
2. Кохан Н. Г., Тютянова В. А. Экономико-математические методы и модели. Гомель, 2007. 91 с.
3. Пучков Н. П., Денисова А. Л., Щербакова А. В. Математика в экономике. Тамбов, 2002. 80 с.

References:

1. Fedoseev, V. V., Garmash, A. N., & Orlova, I. V. (2013). Ekonomiko-matematicheskie metody i prikladnye modeli.. Moscow. (in Russian).
2. Kokhan, N. G., & Tyutyanova, V. A. (2007). Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Gomel'. (in Russian).
3. Puchkov, N. P., Denisova, A. L., & Shcherbakova, A. V. (2002). Matematika v ekonomike. Tambov. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 21.03.2025 г.

Принята к публикации 27.03.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Сафина Г. Ф., Кириллова Е. А. Использование матрицы обмена к поиску равновесной ситуации на примере замкнутой экономической системы // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №6. С. 21-24. https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/02

Cite as (APA):

Safina, G., & Kirillova, E. (2025). Using the Exchange Matrix to Find an Equilibrium Situation Using the Example of a Closed Economic System. *Bulletin of Science and Practice, 11*(6), 21-24. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/02