УДК 372.851 https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО И СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*©**Якубова У. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5831-7068, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru,*
*©**Парпиева Н. Т.,** ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Белорусско-узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций в Ташкенте, г. Ташкент, Узбекистан, nparpieva@mail.ru*
*©**Мирходжаева Н. Ш.,** ORCID: 0000-0001-5370-9871, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon_7@mail.ru*

SOME APPLICATIONS OF GRAPHICAL AND SIMPLEX METHODS FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

*©**Yakubova U.**, ORCID: 0000-0001-5831-7068, Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru,*
*©**Parpieva N.**, ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Belarusian-Uzbek Intersectoral Institute of Applied Technical Qualifications in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, nparpieva@mail.ru*
*©**Mirkhodjaeva N.**, ORCID: 0000-0001-5370-9871, Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru*

Аннотация. В работе приведены некоторые применения теории математического программирования в экономике. В частности, при нахождении экстремума многомерных функций при заданных многомерных ограничениях используются методы математического программирования. Также рассматривается задача об использовании сырья, задача о составлении рациона. Кроме этого, рассмотрена идея симплексного метода, алгоритм симплексного метода и решение примеров, используя симплексный метод.

Abstract. The paper presents some applications of the theory of mathematical programming in economics. In particular, when finding the extremum of multivariable functions with given multidimensional constraints, mathematical programming methods are used. The problem of using raw materials, the task of compiling a diet are also considered. In addition, the idea of the simplex method, the algorithm of the simplex method and the solution of examples using the simplex method are considered.

Ключевые слова: симплексный метод, экстремум функции многих переменных, математическое программирование, линейное программирование.

Keywords: simplex method, extremum of multivariable functions, mathematical programming, linear programming.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания практической математики в экономическом ВУЗе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1].

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [2].

Как известно, при нахождении экстремума многомерных функций при заданных многомерных ограничениях используются методы математического программирования. Функция, для которой ищется экстремальное значение, называется целевой функцией поставленной задачи. Ограничения, поставленные на неизвестные задачи, записываются в виде системы уравнений или неравенств.

Методам линейного программирования посвящено много фундаментальных работ. Математик Д. Данциг ввел понятие линейного программирования и предложил в 1949 г. алгоритм, получивший название симплексный метод. Отметим также исследования С. Гасса, С. Карлина, Р. Беллмана, Д. Неймана, О. Моргенштерна, Д. Хедли и А. Кофмана.

Рассмотрим построение математических моделей некоторых простейших экономических задач.

Задача об использовании сырья. При выпуске n видов продукции используется m видов сырья. Обозначим через $S_i \ \left(i=\overline{1,\ m}\right)$ виды сырья; b_i - запасы сырья i-го вида; $P_j, \ \ j=\overline{1,\ n}$ - виды продукции; a_{ij} - количество единиц i-го сырья, идущего на изготовление единицы j-й продукции; C_j - величина прибыли, получаемой при реализации единицы j-й продукции.

Пусть x_j - количество единиц j-й продукции, которую необходимо произвести. Тогда математическую модель задачи можно представить в следующем виде. Найти максимальное значение линейной функции:

$$L = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_j \ge 0 \ \ \left(j=\overline{1,\ n}\right)
\end{aligned}$$

Задача о составлении рациона. Пусть в рационе m видов питательных веществ в количестве не менее $b_i \ \left(i=\overline{1,\ m}\right)$ ед., и необходимо использовать n видов кормов. Для составления математической модели задачи обозначим через $a_{ij}\left(i=\overline{1,\ m};\ j=\overline{1,\ n}\right)$ - количество единиц i –го питательного вещества, содержащегося в единице j-го корма; C_j - стоимость единицы j-го корма; x_j - количество единиц j –го корма в дневном рационе.

Необходимо найти минимальное значение линейной функции:

$$L = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m\\
&x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\, n}\right)
\end{aligned}
$$

Графическое решение задач линейного программирования. Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется в основном при решении задач с двумя переменными. Рассмотрим задачу линейного программирования, система ограничений которой задана в виде неравенств. Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными имеет вид:

$$L\left(\overline{x}\right) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m\\
&x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\, 2}\right)
\end{aligned}
$$

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ \left(i = \overline{1,\, m}\right)$. Это означает, что прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых справедливо наше неравенство, а в другой - противоположное. Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной четверти.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач линейного программирования используют вектор $gradL$ на плоскости x_1Ox_2, который обозначим $\overline{N}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции, он равен

$$gradL = \overline{N} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\bar{e}_1$$

где $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ — единичные векторы по осям Ox_1 и Ox_2 соответственно. Таким образом, $\overline{N} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}\right)$. Координаты вектора $\overline{N}$ являются коэффициентами целевой функции $L\left(\overline{x}\right)$.

Алгоритм решения задач линейного программирования графическим методом.

1. Находим область допустимых решений из системы ограничений задачи.
2. Строим вектор $\overline{N}$.
3. Проводим линию уровня L_0, перпендикулярную $\overline{N}$.
4. Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\overline{N}$ для задач на максимум и в направлении противоположном $\overline{N}$ для задач на минимум. Это перемещение проводится до тех пор, пока у линии уровня не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка будет точкой *экстремума* целевой функции в области допустимых решений, т.е. будет оптимальным решением задачи ЛП.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то задача ЛП будет иметь *бесчисленное множество решений*. Если ОДР — *неограниченная область*, то целевая функция может быть неограниченной.

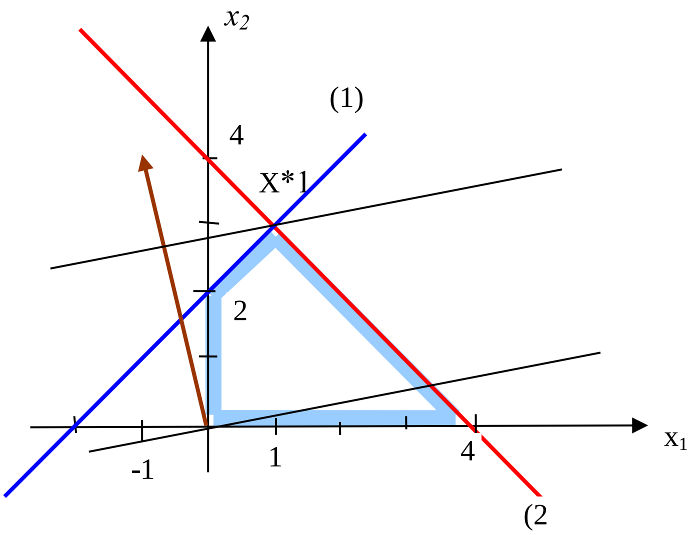
Задача ЛП может быть *неразрешима*, когда ограничения, определяющие ее ОДР, окажутся противоречивыми.

Пример. Решить задачу линейного программирования

$$L(\bar{x}) = -6 - x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2, & (1) \\ x_1 + x_2 \le 4, & (2) \\ x_1 \ge 0, (3) \quad x_2 \ge 0 & (4) \end{cases}$$

Решение. Построим множество допустимых решений. Нумеруем ограничения задачи. В прямоугольной декартовой системе координат построим прямую $x_1 - x_2 = -2$, соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей является областью решений неравенства. Так, прямая (1) не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O(0, 0) в первое ограничение $0 - 0 \ge -2$. Получаем верное строгое неравенство 0 > -2. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Аналогично строим прямые (2) – (4).



Нашли $\overrightarrow{grad}\,L = -\vec{i} + 4\vec{j}$, провели линию уровня функции, перпендикулярно градиенту, передвигаем ее параллельно самой себе в направлении $\overrightarrow{grad}\,L$. Эта прямая проходит через точку X* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (1) и (2). Определяем координаты точки X*, решая систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$$

Получаем X*(1, 3). Вычисляем $L(X^*) = -6 - 1 + 4 \cdot 3 = 5$.

$$\max L(1;\,3) = 5.$$

Симплексный метод является более универсальным, чем графический. Он позволяет решить любую задачу линейного программирования, заданную в каноническом виде, с любым количеством переменных.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Поскольку число опорных решений конечно, через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение.

Критерием оптимальности задачи линейного программирования является выражение

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если в случае задачи на максимум, все оценки Δ_j неотрицательны, то найденное решение является оптимальным, и его улучшить нельзя. Но если хотя бы одно значение Δ_j отрицательно, то решение можно улучшить, если одну из базисных переменных заменить той, для которой $\Delta_j < 0$.

Таким образом, можно сформулировать критерий оптимальности: решение задачи линейного программирования будет оптимальным, если все оценки неотрицательные (т.е. $\Delta_j \geq 0$) для задачи на максимум и неположительные (т.е. $\Delta_j \leq 0$) для задачи на минимум.

Каноническая форма задачи ЛП:

Целевая функция

$$L(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

система ограничений

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1} x_{m+1} + a_{1,m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1} x_{m+1} + a_{2,m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1} x_{m+1} + a_{m,m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right)$$

Симплексная таблица и алгоритм симплексного метода. Для удобства вычислений симплексным методом составляют симплексную таблицу.

БП	С	В	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	...	c_n
			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	...	x_n
x_1	c_1	b_1	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	...	a_{1n}
x_2	c_2	b_2	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	...	a_{2n}
…	…	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	c_m	b_m	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	...	a_{rn}
		$L(\bar{x})$	0	0	...	0	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	...	Δ_n

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она не каноническая, то ее нужно привести к каноническому виду.

Т. 8. №4. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/77

2. Заполняем симплексную таблицу. Все строки Таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции. Находим исходное опорное решение.

3. Проверяем найденное исходное опорное решение на оптимальность. Индексная строка находится по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j, \left(j = \overline{1, n}\right)$, для переменных и по формуле $\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$ — для свободного члена. При решении задачи на максимум возможны следующие случаи:

- все оценки $\Delta_j > 0$, тогда найденное решение оптимальное;

- хотя бы одна оценка $\Delta_j < 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, тогда решение задачи прекращаем, так как $L\left(\overline{x}\right) = \infty$, т.е. целевая функция не ограничена в области допустимых решений;

- хотя бы одна оценка отрицательная, при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, тогда можно перейти к другому опорному решению, которому соответствует большее значение целевой функции;

- отрицательных оценок в индексной строке несколько, тогда в графу БП вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Пусть одна оценка $\Delta_k < 0$ или наибольшая по абсолютной величине $\Delta_k < 0$, тогда k-ю графу принимаем за ключевую. За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов b_i к положительным коэффициентам k-й графы. Элемент, находящийся в ключевой строке и ключевой графе, называют разрешающим элементом.

4. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

- переписываем ключевую строку, разделив ее на разрешающий элемент;

- заполняем базисные графы;

- остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение.

5. Возвращаемся к первому шагу алгоритма.

Рассмотрим решение задач линейного программирования симплексным методом.

Пример. $L\left(\overline{x}\right) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5 \\ &2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ &2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ &x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, 3}\right) \end{aligned}$$

Решение. Перепишем исходную задачу в канонической форме $L\left(\overline{x}\right) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

при ограничениях

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\,6}\right)$$

Для удобства вычислений составим симплексную Таблицу.

БП	*С*	*В*	*-1*	*3*	*2*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	5	-1	-1	-2	1	0	0
x_5	0	3	(2)	-3	1	0	1	0
x_6	0	5	2	-5	6	0	0	1
		0	1	-3	-2	0	0	0
x_4	0	13/2	0	-5/2	-3/2	1	½	0
x_1	-1	3/2	1	-3/2	½	0	½	0
x_6	0	2	0	-2	5	0	-1	1
		-3/2	0	-3/2	-5/2	0	-1/2	0

$$\bar{x}_{опт} = (x_1, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5,\, x_6) = (3/2,\, 0,\, 0, 13/2,\, 0,\, 2),\ \min L(\bar{x}) = -3/2$$

$$\Delta = 0\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 0\cdot 2 - (-1) = 1,$$
$$\Delta = 0\cdot(-1) + 0\cdot(-3) + 0\cdot(-5) - 3 = -3,$$
$$\Delta = 0\cdot(-2) + 0\cdot 1 + 0\cdot 6 - 2 = -2,$$
$$\Delta = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta = 0\cdot 1/2 - 1\cdot 1/2 + 2\cdot(-1) - 0 = -5/2,$$
$$\Delta = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0.$$

$$\min\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{3}{2}.$$

Из симплексной таблицы

$$\bar{x}_{опт} = (x_1, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5,\, x_6) = (3/2,\, 0,\, 0, 13/2,\, 0,\, 2),\ \min L(\bar{x}) = -3/2.$$

Пример. Решить задачу линейного программирования симплексным методом

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ \textit{Отв. } x_{опт} = (2,\ 2) \max L(x_{опт}) = 8 \end{cases}$$

Решение. Перепишем исходную задачу в канонической форме

$$L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Для удобства вычислений составим симплексную таблицу.

БП	*С*	*В*	*1*	*2*	*0*	*0*	*0*
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	24	2	3	1	0	0
x_4	0	15	1	3	0	1	0
x_5	0	4	0	(1)	0	0	1
		0	-1	-2	0	0	0
x_3	0	12	2	0	1	0	-3
x_4	0	3	(1)	0	0	1	-3
x_2	2	4	0	1	0	0	1
		8	-1	0	0	0	2
x_3	0	6	0	0	1	-2	(3)
x_1	1	3	1	0	0	1	-3
x_2	2	4	0	1	0	0	1
		11	0	0	0	1	-1
x_5	0	2	0	0	1/3	-2/3	1
x_1	1	9	1	0	1	-1	0
x_2	2	2	0	1	-1/3	2/3	0
		11	0	0	1/3	1/3	0

$$\min\left\{\frac{24}{3}, \frac{15}{3}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{4}{1}, \quad \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{3}{1}, \quad \min\left\{\frac{6}{3}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{4}{1}.$$

Из симплексной таблицы

$$\overline{x}_{опт} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (9, 2, 0, 0, 0) \Rightarrow \max L(x_{опт}) = x_1 + 2x_2 = 9 + 2 \cdot 2 = 13$$

Таким образом, весь математический аппарат теории линейного программирования, в частности, графический и симплексный методы, успешно может быть применен при решении экономических задач. Это является фактором в пользу изучения теоретических основ математики и смежных дисциплин.

Список литературы:

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

References:

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice, 7*(2), 245-253. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24
2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice, 6*(4), 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

Работа поступила в редакцию 01.03.2022 г.

Принята к публикации 04.03.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения графического и симплексного методов решения задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 490-498. https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57

Cite as (APA):

Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2022). Some Applications of Graphical and Simplex Methods for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice, 8*(4), 490-498. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57