

УДК 514.15

https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/02

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСА ИНЕРЦИИ ЗАДАННОЙ СХЕМЫ ПЛОСКОГО СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

©Пичкалова А. Д., ORCID: 0000-0001-8330-8454, SPIN-код: 1882-8213,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия, pichkalova01@mail.ru

DETERMINATION OF THE CENTRAL MOMENT OF INERTIA AND CONSTRUCTION OF AN ELLIPSE OF INERTIA OF A GIVEN SCHEME OF A FLAT COMPOSITE CROSS-SECTION ACCORDING TO GEOMETRIC CHARACTERISTICS

©Pichkalova A., ORCID: 0000-0001-8330-8454, SPIN-code: 1882-8213,
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia, pichkalova01@mail.ru

Аннотация. Для заданного плоского составного сечения приведены расчеты по нахождению направления главных центральных осей и главных центральных моментов инерций, а также построение эллипса инерции. В ходе расчета были также найдены: положение центра тяжести; собственные для простых фигур и центральные осевые центробежные моменты инерции; графически определены центральные моменты инерции и проведено сравнение значений с результатами аналитического метода.

Abstract. In this article, for a given planar composite cross-section, calculations are given for finding the direction of the main central axes and the main central moments of inertia, as well as the construction of an ellipse of inertia. During the calculation, the following were also found: the position of the center of gravity; proper for simple figures and central axial centrifugal moments of inertia; the central moments of inertia were graphically determined, and the values were compared with the results of the analytical method.

Ключевые слова: сечение, момент инерции, центр тяжести.

Keywords: cross-section, moment of inertia, center of gravity.

Соппротивление стержня при различных типах деформации часто зависит не только от его материала и размера, но и от характера осевой линии, формы поперечных сечений и их ориентации. Еще в древние времена зодчие знали, что плита или балка, поставленные на ребро, противостоят изгибу во много раз лучше, чем те, которые уложены плашмя. Речь идет об их несущей способности и деформативности [1].

Для двутавровой стандартной балки, поставленной на две опоры, эти показатели примерно в 7 и 30 раз выше, чем у балки квадратного поперечного сечения такой же площади, сделанной из того же материала. Таким образом, рациональное расположение материала в поперечном сечении позволяет снизить его расход. При расчете конструкций на механическую надежность очень часто необходимо работать с такими свойствами плоских фигур, как статический момент, осевой и моменты инерции. Хотя вычисление вышеуказанных геометрических характеристик относится к числу простейших задач интегрального исчисления, однако из-за их узкой прикладной значимости они вряд ли считаются университетским курсом высшей математики.

Заданное сечение стержня представляет собой несимметричную плоскую составную фигуру, показанную на Рисунке 1.

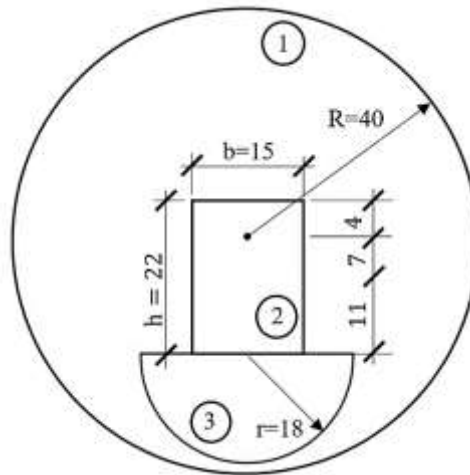


Рисунок 1. Заданное сечение с геометрическими характеристиками и нумерацией простейших фигур

Для решения данной задачи следует найти центр тяжести данной фигуры (Рисунок 2).

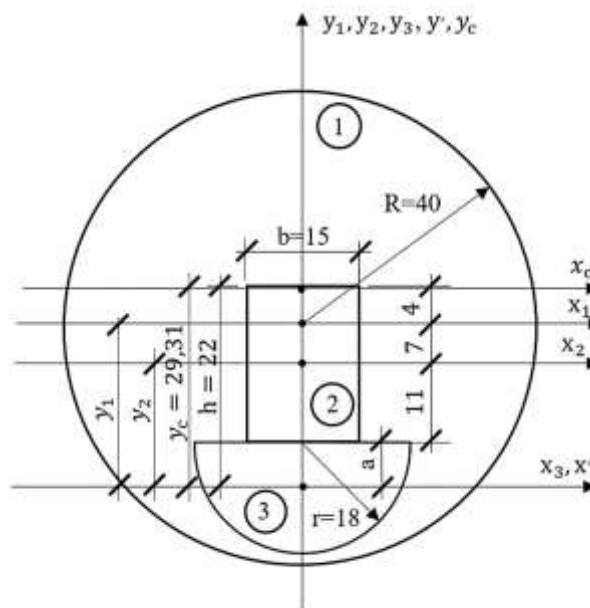


Рисунок 2. Схема для нахождения центра тяжести фигур с указанием центральных осей фигур

Формула определения центра тяжести [2]:

$$x_c = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot (-A_2) + x_3 \cdot (-A_3)}{A_1 + (-A_2) + (-A_3)} \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot (-A_2) + y_3 \cdot (-A_3)}{A_1 + (-A_2) + (-A_3)}, \quad (2)$$

где x_1, x_2, x_3 — расстояние от y_1 и y_2 до вспомогательной оси y' ; y_1, y_2, y_3 — расстояние от x_1 и x_2 до вспомогательной оси x' ; A_1, A_1, A_1 — площади составных фигур.

Определение x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 0 \\x_3 &= 0;\end{aligned}$$

Нахождение y_1, y_2, y_3 :

чтобы найти y_1, y_2 , определяем расстояние от края фигуры до оси x_2 :

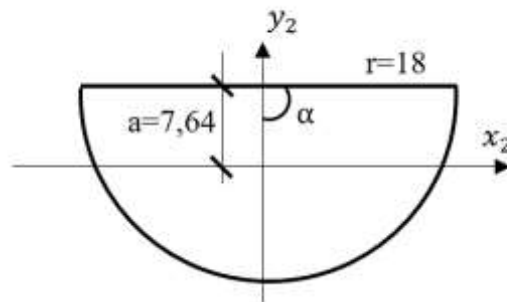


Рисунок 3. Схема для нахождения центра тяжести третьей простейшей фигуры

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi}{2} \\a &= \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 1 \cdot 2}{\pi} = \frac{4r}{3\pi} \\a &= \frac{4 \cdot 18}{3 \cdot 3,14} \\a &= 7,64 \text{ см}\end{aligned}$$

Находим y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{aligned}y_1 &= 18 + 7,64 = 25,64 \text{ см} \\y_2 &= 7,64 + 11 = 18,64 \text{ см} \\y_3 &= 0\end{aligned}$$

Нахождение площади простейших фигур:

$$\begin{aligned}A_1 &= \pi R^2 \\A_1 &= 3,14 \cdot 40^2 \\A_1 &= 5024 \text{ см}^2 \\A_2 &= -bh \\A_2 &= -(15 \cdot 22) \\A_2 &= -330 \text{ см}^2 \\A_3 &= -\frac{\pi R^2}{2} \\A_3 &= -\frac{3,14 \cdot 18^2}{2} \\A_3 &= -508,68 \text{ см}^2\end{aligned}$$

Подставляем полученные значения в формулы (1) и (2):

$$x_c = \frac{0 \cdot A_1 + 0 \cdot (-A_2) + 0 \cdot (-A_3)}{A_1 + (-A_2) + (-A_3)}$$

$$\begin{aligned}x_c &= 0 \\y_c &= \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot (-A_2) + y_3 \cdot (-A_3)}{A_1 + (-A_2) + (-A_3)} \\y_c &= \frac{25,64 \cdot 5024 + 18,64 \cdot (-330) - 0}{5024 + (-330) + (-508,68)} \\y_c &= \frac{128815,36 - 6151,2 - 0}{4\ 185,32} \\y_c &= 29,31 \text{ см}\end{aligned}$$

Далее необходимо найти собственные для простых фигур центральные осевые и центробежные моменты инерции следующим образом:

1. Для первой фигуры:

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{\pi R^4}{4},$$

где I_{x_1}, I_{y_1} — центральные осевые моменты инерции для первой фигуры.

$$\begin{aligned}I_{x_1} &= I_{y_1} = \frac{\pi 40^4}{4} \\I_{x_1} &= I_{y_1} = 2009600 \text{ см}^4\end{aligned}$$

$I_{x_1 y_1} = 0$, так как фигура симметрична; $I_{x_1 y_1}$ — центробежный момент инерции для первой фигуры.

2. Для второй фигуры:

$$\begin{aligned}I_{x_2} &= \frac{bh^3}{12}, \\I_{x_2} &= \frac{15 \cdot 22^3}{12} \\I_{x_2} &= 13310 \text{ см}^4 \\I_{y_2} &= \frac{hb^3}{12} \\I_{y_2} &= \frac{22 \cdot 15^3}{12} \\I_{y_2} &= 6187,5 \text{ см}^4\end{aligned}$$

I_{x_2}, I_{y_2} — центральные осевые моменты инерции для второй фигуры. $I_{x_2 y_2} = 0$, так как фигура симметрична. $I_{x_2 y_2}$ — центробежный момент инерции для второй фигуры.

3. Для третьей фигуры:

$$\begin{aligned}I_{x_3} &= 0,11r^4, \\I_{x_3} &= 0,11 \cdot 18^4 \\I_{x_3} &= 11547,36 \text{ см}^4 \\I_{y_3} &= \frac{\pi r^4}{8} \\I_{y_3} &= \frac{3,14 \cdot 18^4}{8} \\I_{y_3} &= 41203,08 \text{ см}^4\end{aligned}$$

I_{x_3}, I_{y_3} — центральные осевые моменты инерции для второй фигуры. $I_{x_3y_3} = 0$, так как фигура симметрична. $I_{x_3y_3}$ — центробежный момент инерции для второй фигуры.

Можно сделать вывод о том, что центральные оси совпадают с главными, так как сечение симметрично. Нахождение главных осевых центральных моментов инерции I_{x_c}, I_{y_c} по следующим формулам:

$$I_{x_c} = I_{max} = I_{x_c}^1 - I_{x_c}^2 - I_{x_c}^3 = (I_{x_1} + y_{c_1}^2 A_1) - (I_{x_2} + y_{c_2}^2 A_2) - (I_{x_3} + y_{c_3}^2 A_3),$$

где I_{x_c} — центральный осевой момент инерции всей составной фигуры, $y_{c_1}, y_{c_2}, y_{c_3}$ — расстояние от оси y_1, y_2, y_3 до оси y_c :

$$y_{c_1} = y_1 - y_c = 25,64 - 29,31 = -3,67$$

$$y_{c_2} = y_2 - y_c = 18,64 - 29,31 = -10,67$$

$$y_{c_3} = y_3 - y_c = 0 - 29,31 = -29,31$$

$$I_{x_c} = I_{min} =$$

$$(2009600 + (-3,67)^2 5024) - (13310 + (-10,67)^2 330) - (11547,36 + (-29,31)^2 508,68)$$

$$I_{x_c} = I_{min} = (2\ 009\ 600 + 67\ 667,75) - (13\ 310 + 37\ 570,14) - (11547,36 + 436\ 994,83)$$

$$I_{x_c} = I_{min} = 2\ 077\ 267,75 - 50\ 880,14 - 448\ 542,19$$

$$I_{x_c} = I_{min} = 1\ 577\ 845,42\ \text{см}^4$$

$$I_{y_c} = I_{max} = I_{y_c}^1 - I_{y_c}^2 - I_{y_c}^3 = (I_{y_1} + x_{c_1}^2 A_1) - (I_{y_2} + x_{c_2}^2 A_2) - (I_{y_3} + x_{c_3}^2 A_3) = I_{y_1} - I_{y_2} - I_{y_3},$$

где I_{y_c} — центральный осевой момент инерции всей составной фигуры, $x_{c_1}, x_{c_2}, x_{c_3}$ — расстояние от оси x_1, x_2, x_3 до оси x_c , I_y — центральный осевой момент инерции фигуры.

$$I_{y_c} = I_{max} = 2009600 - 6187,5 - 41203,08$$

$$I_{y_c} = I_{max} = 1\ 962\ 209,42\ \text{см}^4$$

Затем следует построить эллипсы сечения.

Для этого найдем радиусы эллипса:

$$i_{max} = i_U = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}},$$

где i_{max}, i_U — радиус момента инерции для оси U

$$i_{max} = i_U = \sqrt{\frac{1\ 962\ 209,42}{4\ 185,32}} = 21,65\ \text{см}$$

$$i_{min} = i_V = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}},$$

где i_{min}, i_V — радиус момента инерции для оси V

$$i_{min} = i_V = \sqrt{\frac{1\ 577\ 845,42}{4\ 185,32}} = 19,42\ \text{см}$$

Сделаем проверку по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$
$$I_z = i_z^2 \cdot A,$$

где A — площадь всей составной фигуры, I_z — центральный осевой момент инерции всей составной фигуры по оси z (Рисунок 4).

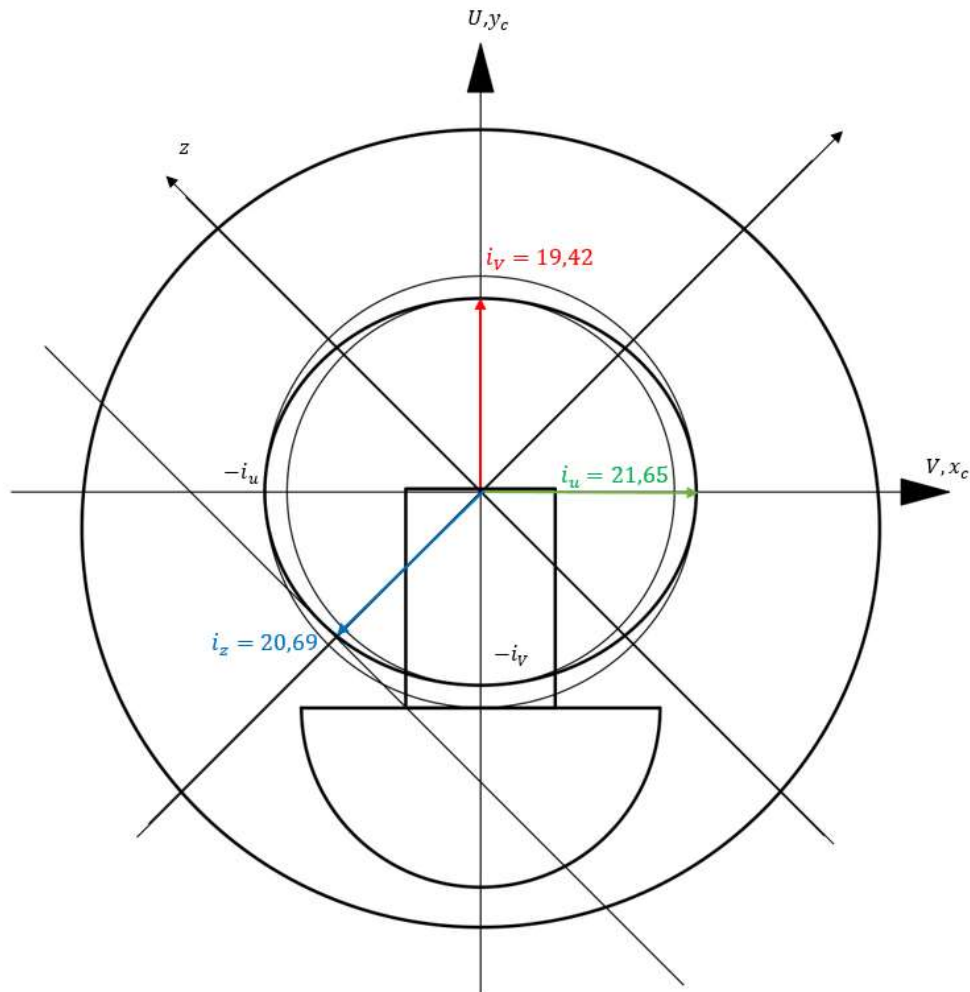


Рисунок 4. Построение эллипса инерции заданного сечения

Измеряем i_z на чертеже. Для этого проводим ось z под углом 45 градусов к центральной оси и проводим касательную к эллипсу параллельную оси z ; расстояние от центра эллипса до этой касательной и будет радиусом инерции:

$$i_z = 20,69 \text{ см}$$
$$I_z = 20,69^2 \cdot 4 185,32 = 1 791 635,46 \text{ см}^4$$

Аналитическое решение данной задачи найдем по следующей формуле:

$$I_z = I_U \cdot \cos^2 \alpha + I_V \cdot \sin^2 \alpha [3],$$

где I_U и I_V определяется графически.

$$I_z = 1 577 845,42 \cdot 0,5 + 1 962 209,42 \cdot 0,5 = 788 922,71 + 981 104,71 =$$

$$= 1\,770\,027,42 \text{ см}^4$$

Нахождение погрешности при расчете по геометрическим характеристикам и аналитическим методом:

$$\delta = \frac{1\,791\,635,46 - 1\,770\,027,42}{1\,791\,635,46} \cdot 100\% = 1,21\%$$

Погрешность составляет меньше двух процентов, можно сделать вывод о том, что расчет выполнен верно.

Таким образом, в результате данных расчетов найдены направления главных центральных осей и главных центральных моментов инерции, а также построен эллипс инерции и проведена проверка получившихся значений.

Список литературы:

1. Кузнецов В. В. Металлические конструкции. М.: Изд-во АСВ, 1998. 576 с.
2. Синозерский А. Н. Вычисление моментов инерции сложных фигур. Воронеж, 2001. 25 с.
3. Беликов Г. И. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней. Волгоград, 2015. 56 с.

References:

1. Kuznetsov, V. V. (1998). Metallicheskie konstruksii. Moscow. (in Russian).
2. Sinozerskii, A. N. (2001). Vychislenie momentov inertsii slozhnykh figur. Voronezh. (in Russian).
3. Belikov, G. I. (2015). Geometricheskie kharakteristiki poperechnykh sechenii sterzhnei. Volgograd. (in Russian).

*Работа поступила
в редакцию 20.08.2022 г.*

*Принята к публикации
24.08.2022 г.*

Ссылка для цитирования:

Пичкалова А. Д. Определение центрального момента инерции и построение эллипса инерции заданной схемы плоского составного сечения по геометрическим характеристикам // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №9. С. 19-25. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/02>

Cite as (APA):

Pichkalova, A. (2022). Determination of the Central Moment of Inertia and Construction of an Ellipse of Inertia of a Given Scheme of a Flat Composite Cross-section According to Geometric Characteristics. *Bulletin of Science and Practice*, 8(9), 19-25. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/02>