УДК 510.54 https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/01
MSC 2020: 62A01

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ВЫРАЗИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

©Палий И. А., *ORCID: 0000-0002-0541-7046, SPIN-код: 6773-1064, Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет, г. Омск, Россия, paliy_ia@mail.ru*

APPLICATION OF GRAPHIC EXPRESSION IN THE PROOF OF SET THEORETICAL STATEMENTS

©Palii I., *ORCID: 0000-0002-0541-7046, SPIN-code: 6773-1064, Siberian State Automobile and Highway University, Omsk, Russia, paliy_ia@mail.ru*

Аннотация. Традиционно математические утверждения доказывают, используя словесные рассуждения. Предлагается дополнение к традиционному способу изложения доказательств, в котором почти отсутствуют словесные пояснения, а ход доказательства представляется графически. Обучающийся может наглядно проследить развитие доказательства во времени (последовательные шаги до получения нужного результата) и в пространстве (разветвления, которые возникают в ходе доказательства и которые требуют отдельного исследования). Такой способ изложения доказательств был разработан нами и применяется в течение многих лет в преподавании курса «Дискретная математика» студентам компьютерных специальностей СибАДИ.

Abstract. Mathematical statements are proved using verbal reasoning. An addition to the traditional way of presenting evidence is proposed. The progress of the proof is presented graphically. There are almost no verbal explanations. The student can visually trace the development of the proof in time (consecutive steps to obtain the desired result) and in space (branching that arise in the course of the proof, and which require a separate study). This way of presenting evidence has been developed and used for many years in teaching the Discrete Mathematics course to students of computer specialties of the Siberian State Automobile and Highway University.

Ключевые слова: теоретико-множественные утверждения, доказательство, графические средства выразительности.

Keywords: set-theoretical statements, proving, graphic expressive means.

Далее приведены примеры, иллюстрирующие применение этого способа изложения доказательств. Для сравнения в трех случаях приведены и традиционные словесные доказательства утверждений. Что следует из определения включения одного множества в другое.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B;$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A;$$
$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } (\exists x \in B): x \notin A;$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x \in A): x \notin B.$$

Что следует из определений операций над множествами.

Объединение множеств:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ или \\ x \in B \end{cases};$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B;$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A, \quad x \notin B.$$

Пересечение множеств:

$$x \in AB \Leftrightarrow x \in A \quad и \; x \in B;$$

$$x \notin A \Rightarrow x \notin AB;$$

$$x \notin AB \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ или \\ x \notin B \end{cases}.$$

Разность множеств:

$$x \in A \backslash B \Rightarrow x \in A, \quad x \notin B;$$

$$x \notin A \backslash B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ или \\ x \in A, \quad x \in B \end{cases}.$$

Симметрическая разность множеств:

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \quad x \notin B \\ или \\ x \notin A, \; x \in B \end{cases};$$

$$x \notin A \Delta B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \quad x \in B \\ или \\ x \notin A, \quad x \notin B \end{cases}.$$

Дополнение множества до универсума:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Примеры доказательств теоретико-множественных утверждений. В частности, равенство множеств $A = B$ доказывается в два этапа:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, \; B \subseteq A.$$

Пример 1.

Закон де Моргана. Доказать, что $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\rightarrow x \in \overline{AB} \Rightarrow x \notin AB \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x \notin A \; \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \\ или \\ x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B});$$

$$\overline{AB} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$\leftarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin AB \\ \text{или} \\ x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in \overline{AB};$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{AB}; \; \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Пример 2. Доказать, что $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow\Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$.

Для доказательства 12 указанных утверждений достаточно доказать любую замкнутую цепочку из четырех утверждений вида

$$\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq BA \subseteq BA \subseteq BA \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \; A \cup B = B \; \Rightarrow A \cap B = A \; \Rightarrow A \backslash B = \emptyset \Rightarrow$$

$$\overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

а) $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B.$

$$x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B}(\overline{B} \subseteq \overline{A}) \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B.$$

б) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$

$$x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{B}\ (A \subseteq \mathrm{B}) \\ \text{или} \\ x \in \mathrm{B} \end{Bmatrix} \Rightarrow x \in \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B};$$

$B \subseteq A \cup B$ по определению объединения множеств;

$A \cup B = B.$

в) $A \cup \mathrm{B} = B \Rightarrow AB = A.$

$AB \subseteq A$ по определению пересечения множеств;

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B = B \Rightarrow x \in AB \Rightarrow \mathrm{A} \subseteq AB;\ AB = A.$

г) $AB = A \Rightarrow A \backslash B = \emptyset.$

$x \in A \backslash B \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A,\ x \notin AB \Rightarrow A \neq AB -$ противоречие

д) $A \backslash B = \emptyset \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$

$$x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \backslash B = \emptyset - \ \textit{противоречие} \\ \textit{или} \\ x \in \bar{A} \end{cases} \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$$

Пример 3. Пусть $\rho_1 \subseteq A \times C, \rho_2 \subseteq C \times B$. Тогда $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Доказательство.

$\rightarrow (a,\ b) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Rightarrow (b, a) \in (\rho_1 \circ \rho_2) \Rightarrow (\exists c)\colon\ (b, c) \in \rho_1, (c, a) \in \rho_2 \Rightarrow \Rightarrow (a, c) \in \rho_2^{-1},\ (c, b) \in \rho_1^{-1} \Rightarrow (a, b) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}.$

$\leftarrow (a, b) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \Rightarrow (\exists c)\colon (a, c) \in \rho_2^{-1},\ (c, b) \in \rho_1^{-1} \Rightarrow (b, c) \in \rho_1,$ $(c, a) \in \rho_2 \Rightarrow (b, a) \in (\rho_1 \circ \rho_2) \Rightarrow (a,\ b) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}.$

$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}.$

Пример 4. Теорема о свойствах бинарного отношения.

Утверждение. Пусть $\rho \subseteq \mathrm{A} \times A$ — бинарное отношение на множестве *A*. Тогда справедливы следующие соотношения

1. ρ рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq \rho$;
2. ρ симметрично$\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;
3. ρ транзитивно$\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$;
4. ρ антирефлексивно$\Leftrightarrow \rho \cap I = \emptyset$;
5. ρ антисимметрично$\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq I$;
6. ρ полно$\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

Доказательство.

1. $\Rightarrow \rho$ рефлексивно, $(\forall a \in A)\colon (a, a) \in \rho \Rightarrow I \subseteq \rho$;

1. $\Leftarrow I \subseteq \rho\ \Rightarrow\ (\forall a \in A)\colon (a, a) \in I \Rightarrow (a, a) \in \rho \Rightarrow \rho$ рефлексивно.

2. $\Rightarrow \rho$ симметрично $\Rightarrow\ (\forall a, b \in A, a \neq b)\colon (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$.

$(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho \Rightarrow (a,b) \in \rho^{-1} \Rightarrow \rho \subseteq \rho^{-1}$.

$(b,a) \in \rho^{-1} \Rightarrow (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \rho$. Значит, $\rho = \rho^{-1}$.

2. $\Leftarrow \rho = \rho^{-1} \Rightarrow (\forall a, b \in A, a \neq b)\colon (a,b) \in \rho \Leftrightarrow (a,b) \in \rho^{-1}$.

$(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho^{-1} \Rightarrow (b,a) \in \rho \Rightarrow \rho$ симметрично.

3. $\Rightarrow \rho$ транзитивно $\Rightarrow\ (\forall a, b, c \in A)\colon (a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$.

$(a,b)\in\rho\circ\rho\Rightarrow(\exists c):(a,c)\in\rho,(c,b)\in\rho)\Rightarrow(a,b)\in\rho\Rightarrow$
$\Rightarrow\rho\circ\rho\subseteq\rho.$

3. $\Leftarrow\rho\circ\rho\subseteq\rho$ $(a,b)\in\rho$, $(b,c)\in\rho\Rightarrow(a,c)\in\rho\circ\rho\Rightarrow(a,c)\in\rho\Rightarrow\rho$ транзитивно.

4. $\Rightarrow\rho$ антирефлексивно $\Rightarrow(\forall a\in A):(a,a)\notin\rho\Rightarrow\rho\cap I=\varnothing$;

4. $\Leftarrow\rho\cap I=\varnothing\Rightarrow(\forall a\in A)$: $(a,a)\notin\rho\Rightarrow\rho$ антирефлексивно.

5. $\Rightarrow\rho$ антисимметрично $\Rightarrow$ $(\forall a,b\in A)$:$(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho\Rightarrow a=b$.

$(a,b)\in\rho\cap\rho^{-1}\Rightarrow(a,b)\in\rho,\ (a,b)\in\rho^{-1}\Rightarrow(a,b)\in\rho,(b,a)\in\rho\Rightarrow$
$\Rightarrow a=b\Rightarrow\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I.$

5. $\Leftarrow\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$.

$(a,b)\in\rho,\ (b,a)\in\rho\Rightarrow(a,b)\in\rho,(a,b)\in\rho^{-1}\Rightarrow(a,b)\in\rho\cap\rho^{-1}\Rightarrow$
$\Rightarrow a=b\Rightarrow\rho$ антисимметрично.

6. $\Rightarrow\rho$ полно $\Rightarrow$ $(\forall a,b\in A,\ a\neq b)$: $(a,b)\in\rho$ или $(b,a)\in\rho$

$$(a,b)\in U\Rightarrow\begin{cases}a=b\Rightarrow(a,b)\in I\\ \text{или}\\ a\neq b\Rightarrow\begin{cases}(a,b)\in\rho\\ \text{или}\\ (b,a)\in\rho\Rightarrow(a,b)\in\rho^{-1}\end{cases}\end{cases}\Rightarrow(a,b)\in\rho\cup\rho^{-1}\cup I.$$

6. $\Leftarrow$ $\rho\cup\rho^{-1}\cup I=U$.

$$(a\neq b)\Rightarrow(a,b)\in\rho\cup\rho^{-1}\Rightarrow\begin{cases}(a,b)\in\rho\\ \text{или}\\ (a,b)\in\rho^{-1}\Rightarrow(b,a)\in\rho\end{cases}\Rightarrow\rho\text{ полно.}$$

Пример 6. Доказать, что объединение $\rho_1\cup\rho_2$ эквивалентностей, $\rho_1,\rho_2\subseteq A\times A$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $\rho_1\cup\rho_2=\rho_1\circ\rho_2$.

Доказательство.

→Пусть $\rho_1,\rho_2,\rho_1\cup\rho_2$, – симметричные, рефлексивные и транзитивные бинарные отношения.

$$(a,b)\in\rho_1\cup\rho_2\Rightarrow\begin{cases}(a,b)\in\rho_1\Rightarrow(a,b)\in\rho_1\ \textit{и}\ (b,b)\in\rho_2\Rightarrow(a,b)\in\rho_1\circ\rho_2\\ \textit{или}\\ (a,b)\in\rho_2\Rightarrow(a,b)\in\rho_2\ \textit{и}\ (a,a)\in\rho_1\Rightarrow(a,b)\in\rho_1\circ\rho_2\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow(a,b)\in\rho_1\circ\rho_2\Rightarrow\rho_1\cup\rho_2\subseteq\rho_1\circ\rho_2$

$(a,b)\in\rho_1\circ\rho_2\Rightarrow\exists c:(a,c)\in\rho_1\ \textit{и}\ (c,b)\in\rho_2\Rightarrow(a,c)\in\rho_1\cup\rho_2,$

$(c,b)\in\rho_1\cup\rho_2\Rightarrow(a,b)\in\rho_1\cup\rho_2\Rightarrow\rho_1\circ\rho_2\subseteq\rho_1\cup\rho_2.$

$\rho_1\circ\rho_2=\rho_1\cup\rho_2.$

←Пусть ρ_1, ρ_2 — симметричные, рефлексивные и транзитивные бинарные отношения; $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2$.

Доказательство симметричности отношения $\rho_1 \cup \rho$.

$$(a,b) \in \rho_1 \cup \rho_2 \text{ и } a \neq b \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in \rho_1 \Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cup \rho_2 \\ \text{или} \\ (a,b) \in \rho_2 \Rightarrow (b,a) \in \rho_2 \Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cup \rho_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cup \rho_2$ симметрчное бинарное отношение.

Доказательство рефлексивности отношения $\rho_1 \cup \rho$.

$(\forall a \in A):(a,a) \in \rho_1$ и $(a,a) \in \rho_2 \Rightarrow (a,a) \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cup \rho_2$ рефлексивно.

Доказательство транзитивности отношения $\rho_1 \cup \rho$.

$(a,b) \in \rho_1 \cup \rho_2$ и $(b,c) \in \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in \rho_1, (b,c) \in \rho_1 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \cup \rho_2 \\ \text{или} \\ (a,b) \in \rho_2, (b,c) \in \rho_2 \Rightarrow (a,c) \in \rho_2 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \cup \rho_2 \\ \text{или} \\ (a,b) \in \rho_1, (b,c) \in \rho_2 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2 \\ \text{или} \\ (a,b) \in \rho_2, (b,c) \in \rho_1 \Rightarrow (c,b) \in \rho_1, (b,a) \in \rho_2 \Rightarrow (c,a) \in \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \cup \rho_2 \text{ в силу симетричности отношения } \rho_1 \cup \rho_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_1 \cup \rho_2 \text{ транзитивно.}$$

Пример 7. Теорема Куратовского-Цорна (следует из теоремы Хаусдорфа).

Если всякая цепь частично упорядоченного множества M обладает верхней гранью, то в множестве M существует хотя бы один максимальный элемент.

Доказательство.

Пусть C – произвольная максимальная цепь частично упорядоченного множества M (по теореме Хаусдорфа такие цепи в M существуют), c — ее верхняя грань. Тогда

$$(\forall b \in M,\ b \neq c): \begin{cases} b \text{ не сравним с } c \\ \text{или} \\ b < c \\ \text{или} \\ b > c \Rightarrow (\forall x \in \mathrm{C}):\ x \leq c < b \Rightarrow x < b \Rightarrow \mathrm{C} \cup \{b\} - \text{цепь,} \\ \text{противоречие с условием максимальности цепи C} \end{cases}$$

Итак, c — максимальный элемент множества M.

Словесное доказательство [1].

Пусть C — максимальная цепь, c — верхняя грань цепи C. Элемент c максимален в M: если существует такой элемент b, что $c < b$, то для всех $x \in C$ ввиду $x \leq c$ будет $x < b$, т. е., присоединяя к цепи C элемент b, мы получим большую цепь в противоречие с максимальностью цепи C.

Пример 8. Доказать утверждение, используя только определения операций над множествами: $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

Доказательство.

$$\rightarrow (x,\ y) \in A \times (B \backslash C) \Rightarrow x \in A,\ y \in B \backslash C \Rightarrow x \in A,\ y \in B,\ y \notin C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,\ y) \in A \times B,\ (x,\ y) \notin A \times C \Rightarrow (x,\ y) \in (A \times B) \backslash (A \times C);$$
$$\leftarrow (x,\ y) \in (A \times B) \backslash (A \times C) \Rightarrow (x,\ y) \in A \times B,\ (x,\ y) \notin A \times C \Rightarrow x \in A,\ y \in B,$$
$$y \notin C \Rightarrow x \in A,\ y \in B \backslash C \Rightarrow (x,\ y) \in A \times (B \backslash C).$$

Пример 9. Доказать, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Доказательство.

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow (\exists!\, y \in A \cap B):\ y = f(x) \Rightarrow y \in A,$$
$$y \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A),\ x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$
$$x = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A), x \in f^{-1}(B) \text{ и } (\exists!\, y):\ y = f(x) \Rightarrow y \in A, y \in B,\ y \in A \cap B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B);\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Замечание. Запись $\exists!\, y$ читается так: существует и единственен элемент y.

Пример 10. Закон дистрибутивности.

Доказать, что $A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$.

$$x \in A \cup BC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B),\ x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B)(A \cup C); \\ \textit{или} \\ x \in BC \Rightarrow x \in B,\ x \in C \Rightarrow x \in A \cup B,\ x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B)(A \cup C); \end{cases}\right\} \Rightarrow \Rightarrow x \in (A \cup B)(A \cup C.$$
$$A \cup (BC) \subseteq (A \cup B)(A \cup C).$$
$$x \in (A \cup B)(A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cup BC; \\ \textit{или} \\ x \notin A,\ x \in B,\ x \in C \Rightarrow x \in BC \Rightarrow x \in A \cup BC \end{cases}\right\} \Rightarrow x \in A \cup BC.$$
$$(A \cup B)(A \cup C) \subseteq A \cup (BC), A \cup (BC) = (A \cup \mathrm{B})(A \cup \mathrm{C}).$$

Пример 11.

Доказать, что $A(B\Delta C) = (AB)\Delta(AC)$.

Доказательство.

$$\rightarrow x \in A(B\Delta C) \Rightarrow x \in A,\ x \in B\Delta C \Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ x \in B,\ x \notin C \Rightarrow x \in AB,\ x \notin AC \\ \textit{или} \\ x \in A,\ x \notin B,\ x \in C \Rightarrow x \in AC,\ x \notin AB \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in (AB)\Delta(AC).\ A(B\Delta C) \subseteq (AB)\Delta(AC)$$
$$\leftarrow x \in (AB)\Delta(AC) \Rightarrow \begin{cases} x \in AB,\ x \notin AC \Rightarrow x \in A,\ x \in B,\ x \notin C \\ \textit{или} \\ x \notin AB,\ x \in AC \Rightarrow x \in A,\ x \in C,\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A,\ x \in B\Delta C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A(B\Delta C).\ (AB)\Delta(AC) \subseteq A(B\Delta C);\ A(B\Delta C) = (AB)\Delta(AC).$$

Словесное доказательство [2].

Пусть $x \in A(B\Delta C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in (B\Delta C)$. Отсюда следует, что если $x \in B$, то $x \notin C$, значит, $x \in AB$, но $x \notin AC$. Если $x \in C$, то $x \notin B$, значит, $x \in AC$, но $x \notin AB$. Таким образом, $x \in (AB)\Delta(AC)$. Итак, $A(B\Delta C) \subseteq (AB)\Delta(AC)$.

Пусть $x \in (AB)\Delta(AC)$. Если $x \in AB$ и $x \notin AC$, то $x \in A,\ x \in B,\ x \notin C$. Значит, $x \in A(B\Delta C)$. Если $x \notin AB$ и $x \in AC$, то $x \in A, x \notin B, x \in C$. Значит,

$x \in A(B\Delta C)$. Итак, $(AB)\Delta(AC) \subseteq A(B\Delta C)$.

Пример 12.

Доказать, что $AB \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \cup C$.

Доказательство.

Пусть $AB \subseteq C$.

$$x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A,\ x \in B \Rightarrow x \in AB \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in \bar{B} \cup C \\ \textit{или} \\ x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{B} \cup C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \bar{B} \cup C;\ A \subseteq \bar{B} \cup C.$$

Пусть $A \subseteq \bar{B} \cup C$

$x \in AB \Rightarrow x \in A,\ x \in B \Rightarrow x \in \bar{B} \cup C,\ x \notin \bar{B} \Rightarrow x \in C \Rightarrow AB \subseteq C$.

Словесное доказательство [2].

Пусть $AB \subseteq C$ и $x \in A$. Рассмотрим два случая: $x \in B$ или $x \in \bar{B}$. Если $x \in B$, то $x \in AB \subseteq C$, т. е. $x \in \bar{B} \cup C$. Если $x \in \bar{B}$, то $x \in \bar{B} \cup C$.

Пусть $A \subseteq \bar{B} \cup C$ и $x \in AB$. Тогда $x \in A,\ x \in B$. Значит, $x \in C$.

Полагаем, что изложенный способ представления доказательств может быть полезен студентам, изучающим компьютерные науки. Он помогает научиться корректному выстраиванию шагов выполнения алгоритма и, соответственно, корректному написанию программ, реализующих алгоритм.

Список литературы:

1. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
2. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
3. Палий И. А. Дискретная математика. М.: Эксмо, 2008. 206 с.
4. Палий И. А. Дискретная математика и математическая логика. М.: Юрайт, 2022. 370 с.

References:

1. Kurosh, A. G. (1973). Lektsii po obshchei algebre. Moscow. (in Russian).
2. Lavrov, I. A., & Maksimova, L. L. (2002). Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoi logike i teorii algoritmov. Moscow. (in Russian).
3. Palii, I. A. (2008). Diskretnaya matematika. Moscow. (in Russian).
4. Palii, I. A. (2022). Diskretnaya matematika i matematicheskaya logika. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 12.11.2022 г.

Принята к публикации 19.11.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Палий И. А. Применение графических средств выразительности при доказательстве теоретико-множественных утверждений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №12. С. 13-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/01

Cite as (APA):

Palii, I. (2022). Application of Graphic Expression in the Proof of Set Theoretical Statements. *Bulletin of Science and Practice, 8*(12), 13-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/01