УДК 517.928
MSC 2020: 34D15; 93C70

https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/06

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКОЙ ПЕРЕВАЛА

©Матанов Ш. М., *ORCID: 0000-0002-9979-7069, SPIN-код: 7182-1303, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, sheralimatanov@yahoo.com*

BOUNDARY LAYER LINES OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBATE EQUATIONS WITH A SADDLE POINT

©Matanov Sh., *ORCID: 0000-0002-9979-7069, SPIN-code: 7182-1303, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, sheralimatanov@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе исследовано асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Рассматриваемые уравнения имеют точку перевала. Основной целью является доказательство существования погранслойных линий, погранслойных областей и регулярных, сингулярных областей, выявление их особенностей по сравнению с предыдущими исследованиями. Для решения поставленных задач привлечены гармонические функции и их линии уровня. С использованием линии уровней проведены геометрические построения. Рассматриваемая область разделена на части и выбраны пути интегрирования обеспечивающие сходимость некоторых функций по малому параметру. Применяя метод последовательных приближений доказано существование и ограниченность решения уравнения. Выявлены особенности пограслойных линий.

Abstract. In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations in complex domains. The considered equations have a saddle point. The main goal is to prove the existence of boundary-layer lines, boundary-layer regions and regular, singular regions, identifying their features in comparison with previous studies. Harmonic functions and their level lines are involved in solving the set problem. Using the level line, geometric constructions are carried out. The area under consideration is divided into parts and integration paths are chosen that ensure the convergence of some functions with respect to a small parameter. Using the method of successive approximations, the existence and boundedness of the solution of the equation is proved. The features of the boundary lines are revealed.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, точка перевала, асимптотическое поведение, линия уровня, погранслойные линии, регулярные и сингулярные области.

Keywords: singular perturbation, saddle point, asymptotic behavior, level line, boundary layer lines, regular and singular regions.

Объект, предмет и цель исследования

Объектом исследования данной работы является уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0 \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый вещественный параметр; $t\in\mathcal{D}\subset C$ — множество комплексных чисел, а $\mathcal{D}$ — односвязная, открытая, ограниченная область; $t_0\in\mathcal{D}$.

Далее $t=t_1+it_2, i=\sqrt{-1}$, t_1,t_2 — действительные переменные, $t_0=t_{10}+it_{20}$, $t_{10},t_{20}\in R$ — множество действительных чисел. Задача (1) - (2) исследована в работах [1–3] при условии $a(t)\in Q(\mathcal{D})$ и $\forall t\in\mathcal{D}\ (a(t)\neq 0)$,

где $Q(\mathcal{D})$ — пространство аналитических функций в $\mathcal{D}$; и введены новые понятия в теории сингулярно возмущенных уравнений: погранслойная область (ПО), погранслойная линия (ПЛ), регулярное и сингулярная области (РО, СО).

Определение 1. Если $T_0\in\mathcal{D}$ и $a(T_0)=0, a'(T_0)=0,\dots,a^{(n-2)}(T_0)=0, a^{(n-1)}(T_0)\neq 0$, то точка T_0называется $(n-1)$ кратным нулем функции $a(t)$.

В данной работе задачу (1)-(2) будем рассматривать при следующих условиях:

УС1. $a(t)\in\mathcal{D}\wedge\left(\exists!\ T_0\in\mathcal{D}\wedge T_0-(n-1)\text{кратный нуль функций } a(t)\right)$.

УС2. $f(t,x)\in Q(H), H=\{(t,x), t\in\mathcal{D},\ |x|\leq M_1\}$.

УС3. $f(t,x)\neq 0, \left(\forall(t,\tilde{x}),(t,\tilde{\tilde{x}})\in H\right)\left(\left|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})\right|\leq M_2\left|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right|\right)$

Здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от ε будем обозначать буквами $M_1,M_2,\dots$.

Предметом нашего исследования будут ПО, ПЛ, РО и СО для задачи (1) – (2), согласно принятых определений в [1–3].

Цель исследования: доказать существование ПО, ПЛ, РО, СО и выявить их особенностей.

Методология и методы исследования

1. Приведение задачи к стандартному виду

Задачу (1) – (2) заменим следующим

$$x(t,\varepsilon)=x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau,\varepsilon))exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{3}$$

где $A(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau$.

Далее для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать. Согласно УС1. функция $A(t)\in Q(\mathcal{D})$ и T_0 является n кратным нулем этой функции. Рассмотрим функции $ReA(t), \mathcal{J}mA(t)$. Точка T_0 будет n кратной точкой перевала для этих функций. Справедлива следующая Лемма 1. Если $A(t)$ аналитична в $\mathcal{D}$ и представима в виде $A(t)-A(T_0)=(t-T_0)^n A_0(t)\ (A_0(t)\neq 0)$, то преобразование $w=(t-T_0)A_0^{\frac{1}{n}}(t)$, где $A_0^{\frac{1}{n}}(t)$ — означает любую непрерывную однозначную ветвь корня n — й степени из $A(t)$; является локально взаимнооднозначным и конформным в окрестности точки T_0 и окрестность T_0 отоброжает в некоторый круг плоскости w с центром в точке (0;0).

Таким образом в (3), проведя соответствующее преобразование, можно рассмотреть уравнение (оставим прежние обозначения)

$$x(t,\varepsilon)=x^0 exp\frac{t^n-t_0^n}{\varepsilon}+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x)exp\frac{t^n-\tau_0^n}{\varepsilon}d\tau, \tag{4}$$

Для простоты в (4), возьмем $n=2$.

2. Геометрические построения.

Будем считать $t \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ — квадрат с вершинами $(-r, 0), (0, r), (r, 0), (0, -r)$ где $0 < -t_0 < r$ и не зависит от ε.

Обозначим $A(t) = t^2$. Пологая $t = t_1 + it_2$ определим функцию $ReA(t) = t_1^2 - t_2^2$.

Определение 2. Пусть $u(t_1, t_2)$ функция двух вещественных переменных.

Множество $(p) = \{(t_1, t_2) \in R^2, u(t_1, t_2) = p - const\}$ назовем линия уровня функции $u(t_1, t_2)$.

Рассмотрим следующую линию уровня функции $ReA(t)$:

$$(p_0) = \{t \in \mathcal{D}, ReA(t) = t_1^2 - t_2^2 = 0\}.$$

Линия (p_0) в точке $(0; 0)$ разветвляется. Ветви (p_0) $\mathcal{D}$ разделяют на четыре части (Рисунок 1).

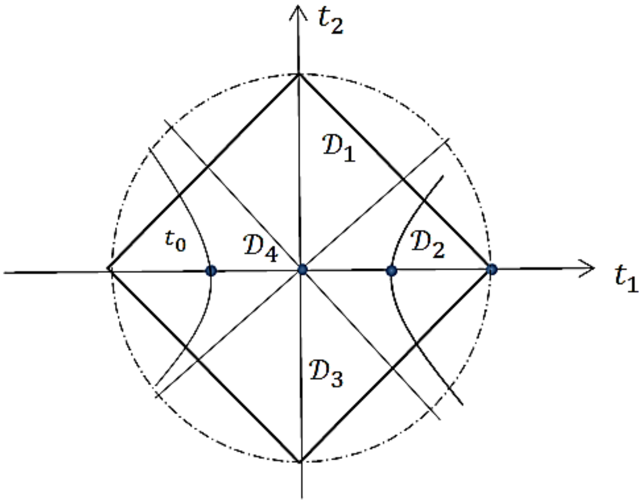

Рисунок 1. Деление $\mathcal{D}$

Эти части обозначим $\mathcal{D}_j$ $(j = 1, \dots, 4)$. В каждом их этих частей функция $ReA(t)$, попеременно принимает отрицательные и положительные значения. Поскольку t_0 произвольное число принадлежащее $\mathcal{D}$, то возможны следующие случаи.

1. $t_0 \in \mathcal{D}_4$ 2. $t_0 \in \mathcal{D}_1$ 3. $t_0 \in \mathcal{D}_2$ 4. $t_0 \in \mathcal{D}_3$ 5. $t_0 \in (p_0)$

Ограничимся рассмотрением случая $t_0 \in \mathcal{D}_4$. Определим линию $(p) = \{t \in \mathcal{D}_4, ReA(t) = ReA(t_0)\}$. Линия уровня (p) проходящая через точку t_0 пересекает ось t_1.

Тогда без ограничения общности можно считает $t_0 \in R$ и $t_0 < 0$ (Рисунок 1). Заметим, в части $\mathcal{D}_2$ также существует линия уровня (p) проходящая через точку $(-t_0)$ (Рисунок 1). В области ограниченной этими линиями $ReA(t) \leq 0$. Это условие является только необходимым условием ограниченности функции (5). На ограниченность (4) сильное влияние может оказать интегральный член в (4), точнее функция $exp\frac{Re(t^2-\tau^2)}{\varepsilon}d\tau$.

Лемма 2. Если существует путь $p(t_0, t)$ соединяющая точки t_0 и $t \in \mathcal{D}$, по которой Ret^2 не возрастает, то интеграл $\mathcal{J}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{t^2-\tau^2}{2\varepsilon}d\tau$ будет ограниченным по модулю.

Доказательство. Пусть путь $p(t_0, t)$ состоит из двух простых дуг: $p_1(t_0, t')$ и $p_2(t', t)$ причем по $p_1(t_0, t')$ функция Ret^2 постоянна, а по $p_2(t', t)$ убывает. Предположим, что $t \in p_1(t_0, t')$ и τ меняется от t_0 до t по $p_1(t_0, t')$. Тогда $Ret^2 = const$, а $Re\tau^2 = const(Re\tau^2 \neq const)$. Отсюда имеем $Re(t^2 - \tau^2) = 0$, значить $|\mathcal{J}(t, \varepsilon)|$ ограничена. $t \in p_2(t', t)$, а τ меняется от t_0 до t' по $p_1(t_0, t')$, затем от t' до t по $p_2(t', t)$.

 Т. 8. №12. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85

По условию на $p_1(t_0, t')$ функция $Re\tau^2 = const$, а по $p_2(t', t)$ $Re\tau^2$ убывает. Значить $Re\tau^2 \geq Ret^2$. Отсюда имеем $Re(t^2 - \tau^2) \leq 0$. В этом случае также $|\mathcal{J}(t, \varepsilon)|$ ограничена. Лемма доказана.

Необходимые построения и выбор путей интегрирования.

Далее ограничимся рассмотрением части области $\mathcal{D}$ ограниченный линиями (p) и $(p_{01}) = \{(t_1, t_2) \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = 0, 0 \leq t_1 \leq +\infty,\ 0 \leq t_2 \leq +\infty\}$, $(p_{02}) = \{(t_1, t_2) \in \mathcal{D}, t_1 + t_2 = 0, 0 \leq t_1 \leq +\infty, -\infty \leq t_2 \leq 0\}$ (Рисунок 2) которую обозначим $\mathcal{D}_0$.

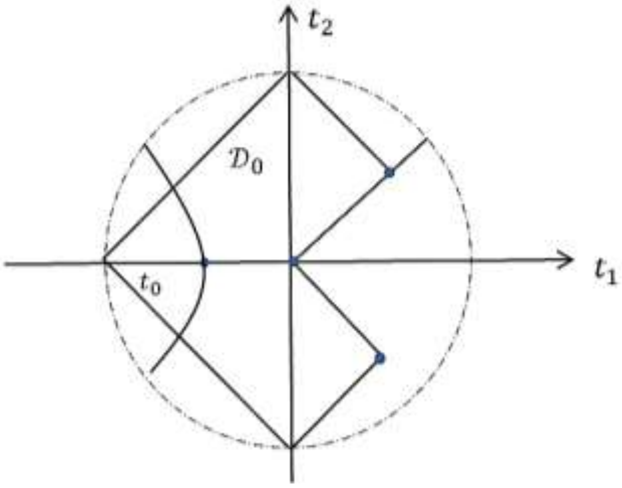

Рисунок 2. Область $\mathcal{D}_0$

Определим линию уровня $(p_{0\varepsilon}) = \{t \in \mathcal{D}, Re(t^2 - t_0^2) = \varepsilon ln\varepsilon\}$.

Область ограниченный (p_0) и $(p_{0\varepsilon})$ обозначим $\mathcal{D}_{0\varepsilon}$. $\mathcal{D}_{0\varepsilon} \subset \mathcal{D}_0$. $\mathcal{D}_0 \backslash \mathcal{D}_{0\varepsilon} = \mathcal{D}_{01}$, при этом считаем,что $(p_{0\varepsilon}) \in \mathcal{D}_{01}$ (Рисунок 3).

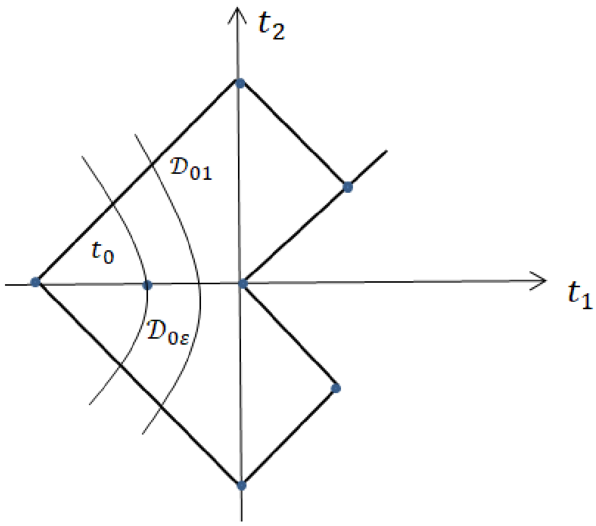

Рисунок 3. Области $\mathcal{D}_{0\varepsilon}$ и $\mathcal{D}_{01}$.

Части $\mathcal{D}_{0\varepsilon}$ и $\mathcal{D}_{01}$ расположенные: выше оси t_1 обозначим, соответственно $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$ и $\mathcal{D}_{11}$; ниже оси t_1, соответственно обозначим $\mathcal{D}_{2\varepsilon}, \mathcal{D}_{21}$. Области $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$ симметрично области $\mathcal{D}_{2\varepsilon}$, а $\mathcal{D}_{11}$ симметрична $\mathcal{D}_{21}$, относительно оси t_1. Рассмотрим область $\mathcal{D}_{1\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{11}$. Далее когда речь пойдет о линиях (p_0) и $(p_{0\varepsilon})$, то будем имееть части (p_0) и $(p_{0\varepsilon})$, преднадлежащие области

Т. 8. №12. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85

$\mathcal{D}_{1\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{11}$. Через точки $(t_0^1, 0), (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ проведем лучи $(p_{11}) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = t_0^1,\ t_0 < t_0^1 < 0$ и t_0^1 — не зависит от $\varepsilon\}, (p_{1\varepsilon}) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = -\sqrt{\varepsilon}\}$.

Далее проведем лучи проходящие через точки $(0, -t_0^1), (0, \sqrt{\varepsilon})$ и исходящие из луча (p_{01}), (Рисунок 4).

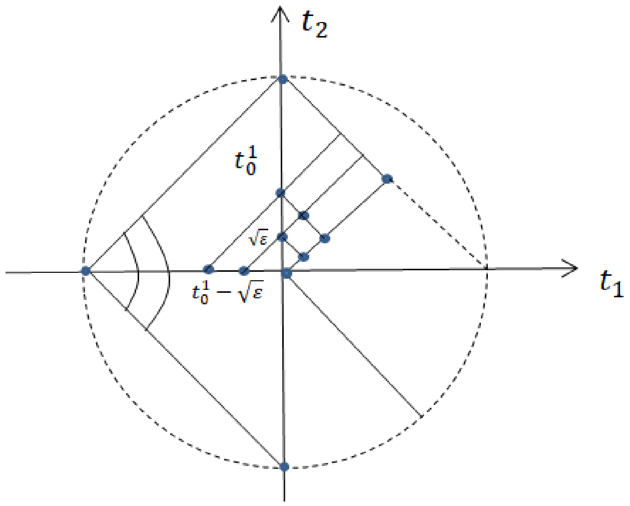

Рисунок 4. Деление области $\mathcal{D}_{11}$

При помощи этих лучей область $\mathcal{D}_{11}$ разделяется на несколько частей, которые обозначим $\mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{17}$ (Рисунок 5).

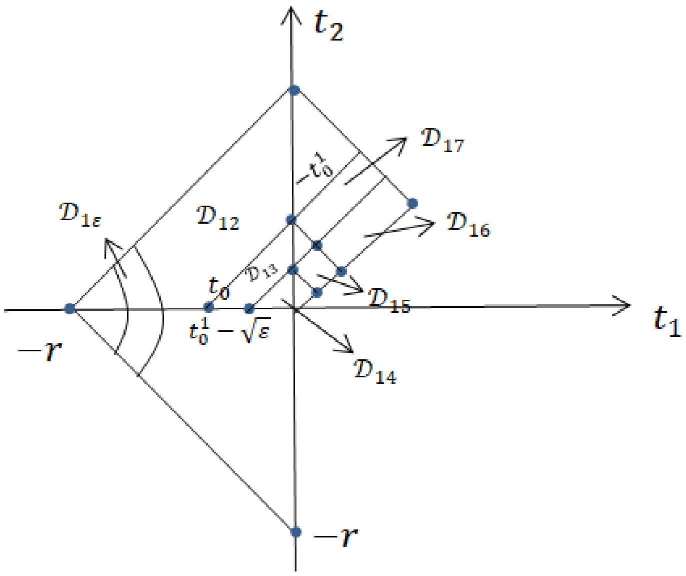

Рисунок 5. Деление области $\mathcal{D}_{11}$.

Руководствуясь Леммой 2 выберем пути интегрирования. Далее запись $(p)[t^1, t^2]$ означает часть кривой соединяющего точки t^1 и t^2.

Пусть $t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{12} \cup \mathcal{D}_{13} \cup \mathcal{D}_{14}$. Если точка $t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{12}$ и распологается выше (по направлению оси t_2) луча $(q_0) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = t_0\}$, то путь состоит из $(p_0)[t_0, \tilde{t}]$ и $(\tilde{q}_1)[\tilde{t}, t]$, где $(\tilde{q}_1) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = \tilde{q}_1, -r \leq\leq \tilde{q}_1 \leq t_0\}$; если точка t распологается ниже (по направлению оси t_2) луча $(q_0) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = t_0\}$, то путь идет по оси t_1 от точки t_0 до $\tilde{t}_1$ $(t_0 < \tilde{t}_1)$, затем по лучу $(\tilde{q}_2) = \{t \in \mathcal{D}, t_1 - t_2 = \tilde{q}_2, t_0 \leq \tilde{q}_2 \leq 0\}$ соединяющего точки $(\tilde{t}_1; 0), (t_1, t_2)$.

Пусть $t \in \mathcal{D}_{15} \cup \mathcal{D}_{16} \cup \mathcal{D}_{17}$. Для этого случая путь идет по оси t_1 от точки t_0 до 0, далее по $(p_{01})[0, \tilde{t}]$ и $(\tilde{q}_3)[\tilde{t}, t]$ где $(\tilde{q}_3) = \{t_1 + t_2 = \tilde{q}_3, \sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_3 \le r\}$.

Проверим выполнимость условий Леммы 2. Пусть $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ текущая переменная. Для $\tau \in (p_0)[t_0, \tilde{t}]$, то $Re\tau^2 = Ret_0^2 - const$. Возьмем путь $(\tilde{q}_1)[\tilde{t}, t]$. Имеем $\tau_1 - \tau_2 = \tilde{q}_1$. Отсюда получим $\tau_2 = \tau_1 - \tilde{q}_1$. Тогда $Re\tau^2 = \tau_1^2 - \tau_2^2 = (\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 + \tau_2) = \tilde{q}_1(2\tau_1 - \tilde{q}_1)$.

$(Re\tau^2)'_{\tau_1} = +2\tilde{q}_1$. По условию $\tilde{q}_1 < 0$, следовательно $(Re\tau^2)'_{\tau_1} < 0$. Это означает, что по пути $(\tilde{q}_1)[\tilde{t}, t]$ функция $Re\tau^2$ убывает.

Функцию $Re\tau^2$ рассмотрим вдоль оси t_1 до точки 0. Имеем $Re\tau^2 = \tau_1^2$. Отсюда получим $(\tau_1^2)' = 2\tau_1 < 0$. $Re\tau^2$ —убывает при $t_0 \le \tau_1 \le 0$.

Теперь возьмем $(\tilde{q}_2)[(\tilde{t}_1; 0),\ (t_1, t_2)]$. Уравнение $(\tilde{q}_2)$ будет $\tau_1 - \tau_2 = \tilde{q}_2$ $(t_0 \le \tilde{q}_2 \le 0)$. Отсюда получим $\tau_2 = \tau_1 - \tilde{q}_2$. Тогда $Re\tau^2 = (\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 + \tau_2) == \tilde{q}_2(2\tau_1 - \tilde{q}_2)$. Из полученного соотношения следует $(Re\tau^2)'_{\tau_1} = 2\tilde{q}_2 < 0$. Функция $Re\tau^2$ убывает по $\tilde{q}_2$. Проверим условие Леммы 2 для $(p_{01})[0, \tilde{t}]$. По определению $\forall\tau \in (p_{01})$ ($Re\tau^2 = 0$ но не тождественно).

Пусть $\tau \in (\tilde{q}_3)$ $[\tilde{t}, t]$. Имеем $\tau_1 + \tau_2 = \tilde{q}_3$ $\left(\sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_3 \le r\right)$.

Отсюда $\tau_1 = \tilde{q}_3 - \tau_2$. Тогда $Re\tau^2 = (\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 + \tau_2) = \tilde{q}_3(\tilde{q}_3 - 2\tau_2)$. Таким образом $(Re\tau^2)'_{\tau_2} = -2\tilde{q}_3 < 0$. Следовательно по $(\tilde{q}_3)$ функция $Re\tau^2$ убывает. Выбранные пути удовлетворяют условиям Леммы 2.

3. Решение задачи

К (4) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом.

$$x_m = x^0 exp\frac{t^2 - t_0^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{m-1}) exp\frac{t^2 - \tau^2}{\varepsilon} d\tau\,, x_0 \equiv 0, \quad m = 1,2, \dots . \tag{5}$$

1. Пусть $t \in (p_0)$. Тогда, согласно выбранного пути интегрирования имеем

$$|x_m| \le |x^0| \left(1 + M_3 t_2 + \dots + \frac{(M_3 t_2)^{m-1}}{(m-1)!}\right) + \left(M_3 t_2 + \dots + \frac{(M_3 t_2)^m}{m!}\right), m = 1,2, \dots \tag{6}$$

Из (6) имеем

$$|x_m| \le |x^0| exp M_3 t_2 + (exp M_3 t_2 - 1) = (|x^0| + 1) exp M_3 t_2 - 1. \tag{7}$$

Согласно УС2 должно быть $(|x^0| + 1) exp M_3 t_2 - 1 \le M_4 < M_1$ $(M_4 > |x^0|)$.

Отсюда получим

$$exp M_3 t_2 \le (M_4 + 1)/(|x^0| + 1) \text{ или } t_2 \le \frac{1}{M_3} ln(M_4 + 1)/(|x^0| + 1). \tag{8}$$

Не ограничивая общности можно считать, что неравенство (8) выполняется для всей части (p_0) принадлежащего $\mathcal{D}$. Теперь докажем сходимость последовательных приближений (5) для $t \in (p_0)$. Для этого оценим $|x_m - x_{m-1}|$. Имеем

$$|x_m - x_{m-1}| \le \int_0^{t_2} |f(\tau, x_{m-1}) - f(\tau, x_{m-1})||d\tau| \le M_3 \int_0^{t_2} |x_m - x_{m-1}|\, d\tau_2, m = 2, \dots . \tag{9}$$

$$|x_m - x_{m-1}| \le |x^0| \frac{(M_3 t_2)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(M_3 t_2)^m}{m!}.$$

На оснавании (9) вытекает, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty}|x_m - x_{m-1}|\quad \forall t \in (p_0)$ сходится равномерно. Действительно $\sum_{m=1}^{\infty}|x_m - x_{m-1}| \le |x^0|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(M_3t_2)^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(M_3t_2)^m}{m!} =$
$= |x^0|expM_3t_2 + expM_3t_2 - 1 = (|x^0| + 1)expM_3t_2 - 1.$

Тогда последовательность (5) $\forall t \in (p_0)$ сходится равномерно к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (4) и для этого решения, согласно (7), справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le (|x^0| + 1)expM_3t_2 - 1 \le M_4 \tag{10}$$

$\forall t \in (p_0)$ предел $x(t,\varepsilon)$ по ε не существует. Поскольку величина $x^0 exp\frac{2it_1t_2}{\varepsilon}$ совершает быстрее колебания и не имеет предела.

2. Пусть $t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon}$. Прежде чем решить поставленную задачу в (4) $(n = 2)$ проведем следующие преобразования, согласно выбранного пути интегрирования:

$$x(t,\varepsilon) = x^0 exp\frac{t^2 - t_0^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau = \tag{11}$$
$$= x^0 exp\frac{t^2 - t_0^2 + \tilde{t}^2 - t_0^2 - \tilde{t}^2 + t_0^2}{\varepsilon} + \int_{(p_0)} f(\tau,x)exp\frac{t^2 - \tilde{t}^2 + \tilde{t}^2 - \tau^2}{\varepsilon}d\tau +$$
$$+ \int_{(\tilde{q}_1)} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau = exp\frac{t^2 - t_0^2 - \tilde{t}^2 + t_0^2}{\varepsilon}[x^0 exp\frac{\tilde{t}^2 - t_0^2}{\varepsilon} +$$
$$+ \int_{(p_0)} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau] + \int_{(\tilde{q}_1)} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau$$

Если учесть случай $\tilde{t} \in (p_0)$, то выражение содержащееся в скобке $[\dots]$ дает функцию $x(\tilde{t},\varepsilon)$ —решение (4) для $\tilde{t} \in (p_0)$ и для этой функции справедлива оценка (10). Учитывая сказанное (11) перепишем в виде

$$x(t,\varepsilon) = x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2 - \tilde{t}^2}{\varepsilon} + \int_{(\tilde{q}_1)} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau. \tag{12}$$

(12) справедлива для части $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$ расположенного выше луча (q_0). Аналогичное представление можно получить для части $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$ расположенного ниже луча (q_0). Только в этом случае в (12) вместо (p_0) будет ось t_1 $[t_0, \tilde{t}_1]$. Как и в предыдущем случае к (12) применим метод последовательных приближений

$$x_m = x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2 - \tilde{t}^2}{\varepsilon} + \int_{(\tilde{q}_1)} f(\tau,x_{m-1})exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}d\tau\,.\, x_0 \equiv 0,\ \ m = 1,2,\dots. \tag{13}$$

В (13) выражение $x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}$ не имеет предела по ε, но ограничена. В первом случае показано, что $x(\tilde{t},\varepsilon)$ не имеет предела по ε. Рассмотрим $exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}$ Имеем $\tilde{t} \in (p_0)$ и $\tilde{t}^2 = \tilde{t}_1^2 - \tilde{t}_2^2 + 2i\tilde{t}_1\tilde{t}_2$, а $t = t_1^2 - t_2^2 + 2it_1t_2$.

При этом $\tilde{t}_1^2 - \tilde{t}_2^2 = t_0^2$, а $t_0 = \varepsilon ln\varepsilon < t_1^2 - t_2^2 \le t_0$ В итоге $t^2 - \tilde{t}^2 = t_1^2 - t_2^2 - -t_0^2 + 2i(t_1t_2 - \tilde{t}_1\tilde{t}_2)$. Учитывая это получим $\varepsilon ln\varepsilon < t_1^2 - t_2^2 - t_0^2 \le 0$. Из полученного неравенства следует, что выражение $(t_1^2 - t_2^2 - t_0^2)$ не может влиять на быстрые колебания функции $exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$. В итоге эта функция не имеет предела.

Оценим (13) и получим

$$|x_m| \le M_6(1 + M_5\varepsilon + \cdots + (\varepsilon M_5)^{m-1}), \qquad m = 1,2 \dots . \tag{14}$$
$$\text{или} |x_m| \le \frac{M_6}{1-M_5\varepsilon},\ M_5\varepsilon < 1.$$

Докажем сходимость последовательных приближений (13). Как и первом случае оценим $|x_m - x_{m-1}|,\ m = 1,2 \dots$.

Имеем $|x_m - x_{m-1}| \le M_6(M_5\varepsilon)^{m-1}, m = 1,2 \dots$.

Таким образом $\forall t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon}$ (13) сходится равномерно к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (4) и справедлива оценка (на основание (14))

$$|x(t,\varepsilon)| \le \frac{M_6}{1-M_5\varepsilon} \qquad \forall t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon}. \tag{15}$$

3. Пусть $t \in \mathcal{D}_{12}$. Для этого случая также справедливо представление (12). Рассмотрим выражение $x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}$. Согласно (10) $|\tilde{x}(t,\varepsilon)| \le M_4$, а $Re(t^2 - \tilde{t}^2) = t_1^2 - t_2^2 - t_0^2 \le \varepsilon ln\varepsilon$. Тогда $|x(\tilde{t},\varepsilon)|\left|exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}\right| \le M_4 expln\varepsilon$.

$expln\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и имеет порядок $\varepsilon^n, n \in N$ т.е выражение $x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2-\tilde{t}^2}{\varepsilon}$ не влияет на асимптотическое поведение решения (12). Определим последовательные приближения (13) и проведем их оценки. Первое приближение имеет оценку
$|x_1| \le M_6\varepsilon$.

Для последующих приближений имеем оценку

$$|x_m| \le M_6\varepsilon + (M_6\varepsilon)^2 + \cdots + (M_6\varepsilon)^m \quad m = 1,2 \dots . \tag{16}$$

Из (16) имеем, при условии $M_6\varepsilon < 1$,

$$|x_m| \le \frac{M_6\varepsilon}{1-M_6\varepsilon}, \quad \forall t \in \mathcal{D}_{12}. \tag{17}$$

Доказательство сходимости последовательных приближений проводится как и в предыдущих случаях.

Для решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (4), согласно (17) справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le \frac{M_6\varepsilon}{1-M_6\varepsilon}, \forall t \in \mathcal{D}_{12}. \tag{18}$$

4. Теперь рассмотрим случай $\forall t \in \mathcal{D}_{13}$. Для этого и последующих случаях выражение $x^0 exp\frac{t^2-{t_0}^2}{\varepsilon}$ имеет порядок $\varepsilon^n, n \in N$ и существенно не влияет на асимптотическое поведение решения. Рассмотрим последовательные приближения (13) согласно выбранного пути интегрирования. Пусть справедлива оценка

$$|x_m| \le M_6\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \cdots + \left(M_7\sqrt{\varepsilon}\right)^{m-1}\right). \tag{19}$$

Тогда

$|x_{m+1}| \le$

$|x_1| + \int_{t_0}^{\tilde{t}_1}|f(\tau,x_m) - f(\tau,0)|exp\frac{t_1^2-\tau_2^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1}|f(\tau,x_m) - f(\tau,0)|\frac{2\tilde{q}_1(t_1-\tau_1)}{\varepsilon}\sqrt{2}d\tau_1 \le |x_1| + M_{70}\sqrt{\varepsilon}|x_m| + M_{71}\sqrt{\varepsilon}|x_m| \le M_6\sqrt{\varepsilon} + M_7\sqrt{\varepsilon}M_6\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \cdots + \left(M_7\sqrt{\varepsilon}\right)^{m-1}\right) = M_6\sqrt{\varepsilon}\left(1 + M_7\sqrt{\varepsilon} + \cdots + \left(M_7\sqrt{\varepsilon}\right)^m\right), |x_{m+1}| \le M_6\sqrt{\varepsilon}\left(1 + M_7\sqrt{\varepsilon} + \cdots + \left(M_7\sqrt{\varepsilon}\right)^m\right)$.

Оценка (19) доказана.

Сходимость последовательных приближений доказывается как и в предыдущих случаях. Для решения (4) имеем оценку (на основании (19))

$$|x(t,\varepsilon)| \le \frac{M_6\sqrt{\varepsilon}}{1-M_7\sqrt{\varepsilon}}, \ \forall t \in \mathcal{D}_{13}. \tag{20}$$

5. $t \in \mathcal{D}_{14}$. (4) согласно выбранного пути интегрирования, представим в виде
$x(t,\varepsilon) = x^0 exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\tilde{t}_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 +$ $\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tilde{q}_2(2\tau_1-\tilde{q}_2)-2i\tau_1(\tau_1-\tilde{q}_2)}{\varepsilon} \times d\big(\tau_1 + i(\tau_1-\tilde{q}_2)\big) = exp\frac{t^2-\varepsilon}{\varepsilon}\Big[x^0 exp\frac{\varepsilon-t_0^2}{\varepsilon} +$ $\int_{t_0}^{-\sqrt{\varepsilon}} f(\tau,x)exp\frac{\varepsilon-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1\Big] + \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\tilde{t}_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tilde{q}_2(2\tau_1-\tilde{q}_2)-2i\tau_1(\tau_1-\tilde{q}_2)}{\varepsilon}$ $\times(1+i)d\tau_1$.

В полученном равенстве выражение, содержащееся в скобке […] дает решение (4) при $t=-\sqrt{\varepsilon}$, то есть $x\big(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon}\big)$. Согласно (20) для этого решения справедлива оценка $\big|x\big(-\sqrt{\varepsilon},\varepsilon\big)\big| \le \frac{M_6\sqrt{\varepsilon}}{1-M_7\sqrt{\varepsilon}}$.

Учитывая сказанное имеем

$$x(t,\varepsilon) = exp\frac{t^2-\varepsilon}{\varepsilon}x(-\sqrt{\varepsilon},\varepsilon) + \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\tilde{t}_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tilde{q}_2(2\tau_1-\tilde{q}_2)-2i\tau_1(\tau_1-\tilde{q}_2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_1 \tag{21}$$

Теперь, учтем, что $-\sqrt{\varepsilon} \le t_1 \le \sqrt{\varepsilon}, \ \ 0 \le t_1 \le \sqrt{\varepsilon}$.

Тогда $-\varepsilon \le t_1^2 - t_2^2 \le \varepsilon$. Следовательно $\left|exp\frac{t^2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|$ ограничена.

$$\int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\tilde{t}_1} exp\frac{t_1^2-t_2^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 = O\big(\sqrt{\varepsilon}\big),$$

$$\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{t_1^2-t_2^2-\tilde{q}_2(2\tau_1-\tilde{q}_2)}{\varepsilon}d\tau_1 = \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{2\tilde{q}_2(2t_1-\tau_1)}{\varepsilon}d\tau_1 \le (t_1-\tilde{t}_1) \le 2\varepsilon.$$

К (21) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим как и в предыдущих случаях. Вышеуказанные соотношения обеспечивают ограниченность и сходимость последовательных приближений. Для решения (4) справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_7\sqrt{\varepsilon}, \ \forall t \in \mathcal{D}_{14} \tag{22}$$

6. $t \in \mathcal{D}_{15}$. Согласно выбранного пути интегрирования (4) представим в следующем виде $x(t,\varepsilon) = x^0 exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{0} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \int_0^{\tilde{t}_2} f(\tau,x)exp\frac{t^2-2i\tau_1^2}{\varepsilon}(1+i)d\tau_1 +$ $\int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{t^2-\tilde{q}_3(\tilde{q}_3-2\tau_2)-2i\tau_1\tau_2}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2$.

В полученном выражении проведем следующее преобразование

$$x(t,\varepsilon) = \tag{23}$$
$$exp\frac{t^2}{\varepsilon}\Big[x^0 exp\frac{-t_0^2}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{0} f(\tau,x)exp\frac{-\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1\Big] +$$
$$\int_0^{\tilde{t}_2} f(\tau,x)exp\frac{t^2-2i\tau_2^2}{\varepsilon}(1\ i)d\tau_2 ++\int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)+2i(t_1t_2-\tau_1\tau_2)}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2.$$

Выражение содержащееся в скобке […] дает значение $x(t,\varepsilon)$ —решения (4) при $t=0$ и для этой функции справедлива оценка (22).

Сначала (23) рассмотрим для $t=\tilde{t}=\tilde{t}_1+i\tilde{t}_2 \in (p_{01})$, где $0 \le t_1 \le r/2, \ \ 0 \le t_2 \le r/2$.

Т. 8. №12. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85

(23) перепишем в виде (вместо $\tilde{t}$ будем писать t)

$$x(t,\varepsilon) = exp\frac{-2it_2^2}{\varepsilon}x(0,\varepsilon) + \int_0^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{2i(t_2^2-\tau_2^2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2. \quad (24)$$

К (24) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим так

$$x_m = x(0,\varepsilon)\, exp\frac{2it_2^2}{\varepsilon} + \int_0^{t_2} f(\tau,x_{m-1})exp\frac{2i(t_2^2-\tau_2^2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2, x_0 \equiv 0, m = 1,2,\dots. \quad (25)$$

Оценим первое приближение. Имеем

$$x_1 = x(0,\varepsilon)\, exp\frac{2it_2^2}{\varepsilon} + \int_0^{t_2} f(\tau,0)exp\frac{2i(t_2^2-\tau_2^2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2.$$

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}(t_2,\varepsilon) = \int_0^{t_2} f(\tau,0)exp\frac{-2i\tau_2^2}{\varepsilon}(1-i)d\tau_2.$$

К этому интегралу применим метод стационарный фазы. Имеем

$$\mathcal{J}(t_2,\varepsilon) = \left(\frac{\pi\varepsilon}{8}\right)^{\frac{1}{2}} f(0,0)e^{-\pi i/4} + O(\varepsilon).$$

Тогда $|x_1| \le M_8\sqrt{\varepsilon}$ для $t \in (p_{01})$.

Для последующих приближений имеем оценки

$$|x_m| \le M_8\sqrt{\varepsilon}\left(1 + t_2 + \dots + \frac{t_2^{m-1}}{(m-1)!}\right) < M_8\sqrt{\varepsilon}\, expt_2 \le M_8\sqrt{\varepsilon}\, exp\frac{r}{2}, \quad (26)$$

$$|x_m| < M_8\sqrt{\varepsilon}exp\frac{r}{2}, m = 1,2,\dots$$

На сходимость последовательных приближений не будем останавливаться, так как оно доказывается как и в предыдущих случаях. Для решения $x(t,\varepsilon)$ справедлива оценка (на основе 26)

$$x(t,\varepsilon) = M_8\sqrt{\varepsilon}exp\frac{r}{2} \quad (27)$$

Теперь рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_{15}$. Имеем

$$x(t,\varepsilon) = (0,\varepsilon)exp\frac{t^2}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{t}_2} f(\tau,x)exp\frac{t^2-2i\tau_2^2}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2 + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)+2i(t_1t_2-\tau_1\tau_2)}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2 = exp\frac{t^2-2i\tilde{t}_2^2}{\varepsilon}\Big[x(0,\varepsilon)exp\frac{2i\tilde{t}_2^2}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{t}_2} f(\tau,x)exp\frac{2i(\tilde{t}_2^2-\tau_2^2)}{\varepsilon}(1+i)d\tau_2\Big] + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)+2i(t_1t_2-\tau_1\tau_2)}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2 = x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2-2i\tilde{t}_2^2}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)+2i(t_1t_2-\tau_1\tau_2)}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2, x(t,\varepsilon) = x(\tilde{t},\varepsilon)exp\frac{t^2-2it_2^2}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} f(\tau,x)exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)+2i(t_1t_2-\tau_1\tau_2)}{\varepsilon}(i-1)d\tau_2. \quad (28)$$

где $x(\tilde{t},\varepsilon)$ является решением (4) для $\tilde{t} \in (p_{01})$ и справедлива оценка (27). К (28) применим метод последовательных приближений и оценим их (поскольку последовательные приближения определяются аналогично предыдущим случаям, выписывать их не будем).

Имеем $|x_1| \leq M_8\sqrt{\varepsilon} exp\frac{r}{2} exp\frac{t_1^2-t_2^2}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} M_2 exp\frac{-2\tilde{q}_3(t_2-\tau_2)}{\varepsilon}\sqrt{2}d\tau_2 \leq M_8\sqrt{\varepsilon} exp\frac{r}{2}\ exp\frac{t_1^2-t_2^2}{\varepsilon} + \sqrt{2}M_2\frac{\varepsilon}{2\tilde{q}_3}$.

Отсюда учитывая $t_1^2 - t_2^2 = (t_1-t_2)(t_1+t_2) = \tilde{q}_3(\tilde{q}_3 - 2t_2^2) \leq 0$, $\frac{\varepsilon}{\tilde{q}_3} \leq \sqrt{\varepsilon}$ получим $|x_1| \leq M_9\sqrt{\varepsilon}$.

Далее

$$|x_m| \leq M_9\sqrt{\varepsilon} + \dots + \left(M_9\sqrt{\varepsilon}\,\right)^m < \frac{M_9\sqrt{\varepsilon}}{1-M_9\sqrt{\varepsilon}}, m = 1,2 \dots \tag{29}$$

при условии $M_9\sqrt{\varepsilon} < 1$. Поскольку $\varepsilon \to 0$, то это условие выполняется.

Тогда для решения (4) имеем оценку

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{M_9\sqrt{\varepsilon}}{1-M_9\sqrt{\varepsilon}}, \forall t \in \mathcal{D}_{15} \tag{30}$$

7. $t \in \mathcal{D}_{16}$. Этот случай аналогично предыдущему случаю. Основной вклад дает выражение $x(\tilde{t},\varepsilon) exp\frac{t^2-2it_2^2}{\varepsilon}$, которое имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$.

Для этого случая $\frac{\varepsilon}{\tilde{q}_3} = O(\varepsilon)$ $(-t_0^1 \leq \tilde{q}_3 \leq \frac{r}{2})$.

Для решения $x(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{M_9\sqrt{\varepsilon}}{1-M_9\sqrt{\varepsilon}},\ \forall t \in \mathcal{D}_{16}. \tag{31}$$

8. $t \in \mathcal{D}_{17}$. В этом случае для $Ret^2 = t_1^2 - t_2^2$ имеем оценку $t_0^1 r \leq t_1^2 - t_2^2 \leq \sqrt{\varepsilon} t_0^1$ $(t_0^1 < 0)$. Тогда $\forall t \in \mathcal{D}_{16}$ $\left(|x(\tilde{t},\varepsilon)| exp\frac{t^2-2it_2^2}{\varepsilon}\right) = M_8\sqrt{\varepsilon} exp\frac{r}{2} exp\frac{t_1^2-t_2^2}{\varepsilon} \leq$ $M_8\sqrt{\varepsilon} exp\frac{r}{2} exp\frac{t_0^1}{\sqrt{\varepsilon}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$). $\frac{\varepsilon}{\tilde{q}_3} = O(\varepsilon), -t_0^1 \leq \tilde{q}_3 \leq r$.

Для решения $x(t,\varepsilon)$имеем оценку

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{M_9\sqrt{\varepsilon}}{1-M_9\sqrt{\varepsilon}},\ \forall t \in \mathcal{D}_{17}. \tag{32}$$

Объединив оценки (10), (15), (18), (20), (22), (30), (31), (32) для решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (4) получим оценку:

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \begin{cases} (|x^0| + 1) exp M_3 t_2 - 1) \leq M_4, \qquad t \in (p_0); \\ M_6/(1-M_5\varepsilon), t \in \mathcal{D}_{1\varepsilon}\ ; \\ M_6\varepsilon/(1-M_6\varepsilon), t \in \mathcal{D}_{12}\ ; \\ M_6\sqrt{\varepsilon}/(1-M_7\sqrt{\varepsilon}), t \in \mathcal{D}_{13}\ ; \\ M_7\sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \mathcal{D}_{14}\ ; \\ M_9\sqrt{\varepsilon}/(1-M_9\sqrt{\varepsilon}), t \in \mathcal{D}_{15} \cup \mathcal{D}_{16}\ ; \\ M_9\varepsilon/(1-M_9\varepsilon), t \in \mathcal{D}_{17}\ ; \end{cases} \tag{33}$$

Таким образом, доказана теорема. Пусть выполняются условия У.1-У.3. Тогда для решения задачи (1)-(2) справедлива оценка (33).

Аналогичные оценки можно получить для областей

$(\overline{p_0})$, $\overline{\mathcal{D}}_{1\varepsilon}$, $\overline{\mathcal{D}}_{12}$, $\overline{\mathcal{D}}_{13}$, $\overline{\mathcal{D}}_{14}$, $\overline{\mathcal{D}}_{15} \cup \overline{\mathcal{D}}_{16}$, $\overline{\mathcal{D}}_{17}$ симметричных соответственно к областям (p_0), $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$, $\mathcal{D}_{12}$, $\mathcal{D}_{13}$, $\mathcal{D}_{14}$, $\mathcal{D}_{15} \cup \mathcal{D}_{16}$, $\mathcal{D}_{17}$ относительно действительной оси.

Выводы

По итогам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Линия уровня (p_0) проходящая через начальное значения t_0 является погранслойной линией.

2. Область $\mathcal{D}_{1\varepsilon}$ — является погранслойной областью.

3. Часть ветвей (p_{01}), (p_{02}) также являются погранслойными линиями,

отделяющие области, где решение имеет неоднородные оценки по ε.

4. Под влиянием точки перевала рассматривая область разделяется на несколько подобластей, в каждом из которых решение имеет неоднородные оценки по ε.

5. Исследования показывают, что погранслойные линии появляются под влиянием точек перевала, и такие линии являются новыми видами погранслойных линий.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б. Существование погранслойных линий для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: материалы II-ой международной конференции. Бишкек, 2013. С. 83-88.

2. Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б. Метод погранслойных линий построения регулярных и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. №10 (45). С. 59-66.

3. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К. Аналитические функции комлексного переменного с параметрами // Международный научно-исследовательский журнал. 2019. №12 (90). С. 6-12.

4. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 234 с.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 739 с.

6. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

References:

1. Alybaev, K. S., & Tampagarov, K. B. (2013). Sushchestvovanie pogransloinykh linii dlya lineinykh singulyarno vozmushchennykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. In *Aktual'nye problemy teorii upravleniya, topologii i operatornykh uravnenii: Materialy II-oi mezhdunarodnoi konferentsii,* Bishkek, 83-88. (in Russian).

2. Alybaev, K. S., & Tampagarov, K. B. (2016). Metod pogransloinykh linii postroeniya regulyarnykh i singulyarnykh oblastei dlya lineinykh singulyarno vozmushchennykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire,* (10(45)), 59-66. (in Russian).

3. Alybaev, K. S., & Narymbetov, T. K. (2019). Analiticheskie funktsii komleksnogo peremennogo s parametrami. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal,* (12 (90)), 6-12. (in Russian).

4. Evgrafov, M. A. (1968). Analiticheskie funktsii. Moscow. (in Russian).

5. Lavrentev, M. A., & Shabat, B. V. (1973). Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

6. Fedoryuk M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 15.11.2022 г.

Принята к публикации 24.11.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Матанов Ш. М. Погранслойные линии решений сингулярно возмущенных уравнений с точкой перевала // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №12. С. 47-59. https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/06

Cite as (APA):

Matanov, Sh. (2022). Boundary Layer Lines of Solutions to Singularly Perturbate Equations With a Saddle Point. *Bulletin of Science and Practice, 8*(12), 47-59. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/06

