УДК 532.546
AGRIS P33
https://doi.org/10.33619/2414-2948/79/11

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ СЛОИСТОМ СТРОЕНИИ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

*©**Маданбекова Э. Э.,** Иссык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, г. Каракол, Кыргызстан, elmira.madanbekova.70@mail.ru*

ALGORITHMS FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE GROUNDWATER LEVEL IN THE LAYERED STRUCTURE OF THE AQUIFER

*©**Madanbekova E.,** K. Tynystanov Issyk-Kul State University, Karakol, Kyrgyzstan, elmira.madanbekova.70@mail.ru*

Аннотация. Предлагается алгоритм решения оптимизационной задачи теории фильтрации подземных вод в многослойных пластах. Цель статьи — разработать алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления уровнем грунтовых вод при слоистом строении водоносных пластов. Рассматривается постановка задачи оптимального управления уровня грунтовых вод (УГВ), для этого решается две краевые задачи. Подробно излагаются алгоритмы решения этих задач. При решении задач применяются: метод конечных элементов, обобщенный принцип Галеркина, методы теории оптимального управления.

Abstract. It is offered algorithm solution for the optimization problem of the in the theory of underground waters filtration in the of multilayer layers.

Ключевые слова: оптимальное управление, уровень грунтовых вод, алгоритм, фильтрация, водоносный слой, функционал.

Keywords: optimal control, groundwater level, algorithm, filtration, aquifer layer, functional.

Рассмотрим движение подземных вод в двухслойных водоносных пластах, состоящих из покровной толщи, подстилаемой основным напорным водоносным горизонтом, разделенным от нижележащего напорного пласта слабопроницаемой прослойкой. Уровни грунтовых вод (УГВ) в покровном слое и напорных вод в первом напорном пласте обозначим соответственно $h(x, y, t)$ и $H(x, y, t)$, а коэффициенты фильтрации и мощности этих пластов – соответственно $k_b(x, y)$, $m_b(x, y, t) = h(x, y, t) - b(x, y)$ и $k(x, y)$, $m(x, y)$, где $b(x, y)$ − поверхность раздела между покровным слоем и первым сверху напорным слоем.

Течение подземных вод в таких слоистых пластах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1].

$$\begin{cases} \mu_b \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_b \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_b \frac{\partial h}{\partial y}\right) + k_b \frac{h-H}{m_b} = f_b, \\ \mu_{упр} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T \frac{\partial H}{\partial y}\right) - k_b \frac{h-H}{m_b} + \frac{k_n}{m_n}(H-Z) = f, \\ (x,y) \in D, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{cases} h(x,y,0) = h_0(x,y), \\ H(x,y,0) = H_0(x,y), (x,y) \in d, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} T_b \frac{\partial h}{\partial n} + \beta_b h = \alpha_b, \\ T \frac{\partial H}{\partial n} + \beta H h = \alpha, (x,y) \in S = \partial D, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где μ_b и $\mu_{упр}$ — свободная водоотдача в покровном слое и упругая водоотдача в первом напорном горизонте;

$$T_b(x,y,t) = k_b(x,y) \cdot m_b(x,y,t) = k_b(h-b) \quad (4)$$

$T(x,y) = k(x,y) \cdot m(x,y)$ — водопроводимость этих слоев; $h_0(x,y)$ и $H_0(x,y)$ — начальное распределение УГВ и напоров; $Z(x,y)$ — напоры во втором напорном пласте; k_m, m_n — коэффициент фильтрации и мощность слабопроницаемой прослойки между напорными пластами; $f_b(x,y,t)$ — функция инфильтрации; $f(x,y,t)$ — функция, учитывающая работу скважин, пробуренных в первый напорный пласт; $\alpha_b(x,y,t)$, $\beta_b(x,y,t)$, $\alpha(x,y,t)$ и $\beta(x,y,t)$ — известные функции; D — плоская область в плане, $S = \partial D$ — ее граница; $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к границе области. Задача оптимального управления УГВ заключается в нахождении функции $f_b(x,y,t)$, доставляющей при $t \geq T_0$ минимум функционалу

$$J(f_b) = \iint_D \left[h\left(x,y,T_0,f_b(x,y,T_0)\right) - \varphi(x,y)\right]^2 dx\,dy + \int_0^{T_0} \iint_D [f(x,y,t)]^2\, dx\,dy\,dt. \quad (5)$$

Здесь $h(x,y,t) = h(x,y,t,f_b)$ — УГВ, определяемые из задачи (1)-(3); $\varphi(x,y)$ — заданная функция, равная оптимальному УГВ; $\gamma > 0$ — параметр регуляризации; T_0 — заданный момент времени.

Функция $h(x,y,t,f_b)$ называется объектом управления, а $f(x,y,t)$ — функцией управления или управлением. Функция $f_b^*(x,y,t)$, доставляющая минимум функционалу (5), называется оптимальным управлением, а соответствующая ей функция $h^*(x,y,t) = h(x,y,t,f_b^*)$ — оптимальным УГВ. В работе [2] установлено, что оптимальное управление f_b^* должно удовлетворять условию

$$f_b(x,y,t) = \frac{1}{2\gamma}\psi(x,y,t)\,, \quad (6)$$

где $\psi(x,y,t)$ – решение сопряженной начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \mu_b \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_b \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T_b \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) - k_b \dfrac{\psi-\zeta}{m_b} = 0, \\ \mu_{упр} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_b \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T_b \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + k_b \dfrac{\psi-\zeta}{m_b} - \dfrac{k_i}{m_i}\zeta = 0, \\ (x,y) \in D, 0 \le t \le T_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \psi(x,y,T_0) = -\dfrac{2}{\mu_b}[h(x,y,T_0 - \varphi(x,y)], \\ \zeta(x,y,T_0) = -\dfrac{2}{\mu_{упр}}[H(x,y,T_0 - H_0(x,y)], (x,y) \in D, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} T_b \dfrac{\partial\psi}{\partial n} + \beta_b\psi = 0, \\ T\dfrac{\partial\zeta}{\partial n} + \beta\zeta = 0, (x,y) \in S, 0 \le t \le T_0. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда следует, что при фиксированном f_b нужно решить две краевые задачи; сначала из (1)-(3) надо определить функции $h(x,y,t,f_b)$, $H(x,y,t)$, затем в начальные условия (8) подставить получившиеся функции $h(x,y,T_0)$ и $H(x,y,T_0)$ и из сопряженной краевой задачи (7)-(9) найти $\psi(x,y,t)$ и полученное $\psi(x,y,t)$ подставить в формулу (6).

Теперь рассмотрим более подробно алгоритмы решения этих задач. Задачи (1)-(3) и (7)-(9) решаем методом конечных элементов [3, 4]. Для этого область фильтрации D произвольным образом разбиваем на треугольные элементы и для каждого элемента (e) введем линейные базисные функции

$$N_s^{(e)}(x,y) = a_s + b_s x + c_s y, s = i,j,k$$

$$N_s^{(e)}(x,y) = a_s + b_s x + c_s y, \qquad s = i,j,k,$$

где i,j,k — номера вершин элемента,

$a_i = (x_j y_k - x_k y_j)/\Delta_e$, $b_i = (y_i - y_k)/\Delta_e$, $c_i = (x_k - x_j)/\Delta_e$ и т.д. Остальные коэффициенты получаются с помощью круговой подстановки индексов i,j,k;

$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ – удвоенная площадь треугольника (e).

Искомые функции $h(x,y,t)$ и $H(x,y,t)$ внутри элемента (e) аппроксимируем функциями

$$h^{(e)}(x,y,t) = h_i(t)N_i^{(e)}(x,y) + h_j(t)N_j^{(e)}(x,y) + h_k(t)N_k^{(e)}(x,y), \tag{10}$$
$$H^{(e)}(x,y,t) = H_i(t)N_i^{(e)}(x,y) + H_j(t)N_j^{(e)}(x,y) + H_k(t)N_k^{(e)}(x,y),$$

Здесь $h_s(t) = h(x_s,y_s,t)$, $H_s(t) = H(x_s,y_s,t)$, $s = i,j,k$.

Суммируя равенства (10) по всем элементам, получаем аппроксимации искомых функций по всей области D:

$$h_n(x,y,t) = \sum_{e=1}^{m} h^{(e)}(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t)N_j(x,y), \tag{11}$$
$$H_n(x,y,t) = \sum_{e=1}^{m} H^{(e)}(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} H_j(t)N_j(x,y),$$

где m — число всех элементов, n — число всех узлов сетки.

Далее временной отрезок $[0, T_0]$ разобьем на равные промежутки длиной Δt, так что $t_s = s\Delta t$, $s = 0,1,2,\dots$. На каждом временном слое $[t_{s-1}, t_s]$, $s = 0,1,2,\dots$, к системе (1)-(3) применяем неявную конечно-разностную схему с весом σ (0<σ≤1) [5]:

$$\begin{cases} \frac{\mu_b}{\Delta t}h^s - \sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h^s}{\partial y}\right)\right] + \sigma k_b\frac{k^s - H^s}{m_b} = Q_b^s, \\ \frac{\mu_{упр}}{\Delta t}H^s - \sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H^s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H^s}{\partial y}\right)\right] - \sigma k_b\frac{k^s - H^s}{m_b} + \sigma\frac{k_n}{m_n}(H^s - Z) = Q^s, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \sigma\left(T_b\frac{\partial h^s}{\partial n} + \beta_b^s h^s\right) = A_b^s, \\ \sigma\left(T\frac{\partial H^s}{\partial n} + \beta^s H^s\right) = A^s, \end{cases} \quad (13)$$

где $h^s = h(x,y,t_s)$, $H^s = H(x,y,t_s)$, $f_b^s = f_b^s(x,y,t_s)$, $f^s = f(x,y,t_s)$,

$$Q_b^s = \sigma f_b^s + \frac{\mu_b}{\Delta t}h^{s-1} + (1-\sigma)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h^{s-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h^{s-1}}{\partial y}\right) - k_b\frac{h^{s-1}-H^{s-1}}{m_b} + f_b^{s-1}\right],$$

$$Q^s = \sigma f^s + \frac{\mu_{упр}}{\Delta t}H^{s-1} + (1-\sigma)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H^{s-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H^{s-1}}{\partial y}\right) + k_b\frac{h^{s-1}-H^{s-1}}{m_b} - \frac{k_i}{m_i}(H^{s-1} - Z) + f^{s-1}\right],$$

$$A_b^s = \sigma\alpha_b^s + (1-\sigma)\left(\alpha_b^{s-1} - T_b\frac{\partial h^{s-1}}{\partial n} - \beta_b^{s-1}h^{s-1}\right),$$
$$A^s = \sigma\alpha^s + (1-\sigma)\left(\alpha^s - T\frac{\partial h^{s-1}}{\partial n} - \beta^{s-1}h^{s-1}\right).$$

В системе (12), (13) вместо $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$ подставим их аппроксимации $h_n(x,y,t)$ и $H_n(x,y,t)$ соответственно и применяем обобщенный принцип Галеркина (для удобства записи верхний индекс s опускаем). Имеем

$$\iint_D N_i(x,y)\left\{\frac{\mu_b}{\Delta t}h_n - \sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial y}\right) - k_b\frac{h_n-H_n}{m_b}\right] - Q_b\right\}d\sigma +$$
$$+ \int_S N_i(x,y)\left[\sigma\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial n} + \beta_b h_n\right) - A_b\right]ds = 0,$$

$$\iint_D N_i(x,y)\left\{\frac{\mu_{упр}}{\Delta t}H_n - \sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial y}\right) + k_b\frac{h_n-H_n}{m_b} - \frac{k_i}{m_i}(H_n - Z)\right] + Q\right\}d\sigma +$$
$$+ \int_S N_i(x,y)\left[\sigma\left(T\frac{\partial H_n}{\partial n} + \beta H_n\right) - A\right]ds = 0,\ i = 1,2,\dots,n,$$

или, после упрощения

$$\iint_D \left\{N_i(x,y)\left[\frac{\mu_b}{\Delta t}h_n + \sigma\left(k_b\frac{h_n-H_n}{m_b}\right) - Q_b\right] + \sigma T_b\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)\right\}d\sigma +$$
$$\int_S N_i(x,y)(\sigma\beta_b h_n - A_b)ds = 0,$$

$$\iint_D \left\{N_i(x,y)\left[\frac{\mu_{упр}}{\Delta t}H_n - \sigma\left(k_b\frac{h_n-H_n}{m_b} - \frac{k_b}{m_b}(H_n - Z) + Q\right)\right] + \sigma T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)\right\}d\sigma +$$
$$\int_S N_i(x,y)(\sigma\beta H_n - A)ds = 0,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Подставляя вместо функций $h_n(x,y,t)$ и $H_n(x,y,t)$ их разложения (11), получаем системы линейных алгебраических уравнений относительно h_j и H_j:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j = c_i, \ i = 1,2, \dots, n, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} H_j = d_i, \ i = 1,2, \dots, n, \tag{15}$$

где

$a_{ij} = \iint_D \left[\left(\frac{\mu_b}{\Delta t} + \frac{\sigma k_b}{m_b} \right) N_i(x,y) N_j(x,y) + \sigma T_b q(N_i N_j) \right] d\sigma + \sigma \int_S \beta_b N_i(x,y) N_j(x,y) ds,$

$c_i = \sigma \sum_{j=1}^{n} H_j \iint_D \frac{k_b}{m_b} N_i(x,y) N_j(x,y) d\sigma + \iint_D Q_b N_i(x,y)\, d\sigma + \int_S A_b N_i(x,y)\, ds,$

$b_{ij} = \iint_D \left[\left(\frac{\mu_{упр}}{\Delta t} + \frac{\sigma k_b}{m_b} - \frac{\sigma k_i}{m_i} \right) N_i(x,y) N_j(x,y) + \sigma T q(N_i N_j) \right] d\sigma + \sigma \int_S \beta N_i(x,y) N_j(x,y) ds,$

$d_i = \sigma \sum_{j=1}^{n} h_j \iint_D \frac{k_b}{m_b} N_i(x,y) N_j(x,y) d\sigma + \iint_D \left(\frac{\sigma k_n}{m_n} z + Q \right) N_i(x,y)\, d\sigma + \int_S A N_i(x,y)\, ds,$

$q(N_i, N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}$.

Система дифференциальных уравнений является нелинейной, так как мощность и водопроводимость потока грунтовых вод зависят от функции $h(x,y,t)$, поэтому для решения этой системы применяется простая итерация. В первом приближении в формуле (4) вместо функции $h(x,y,t_S)$ подставим начальные значения этой функции $h_0(x,y)$, а в следующих приближениях − ее значения из предыдущей итерации. В соответствии с этим алгебраические системы (14) и (15) на каждом временном слое решаются до выполнения условий

$$\max_j \left| h_j^{(v)} - h_j^{(v-1)} \right| \le \varepsilon, \ \max_j \left| H_j^{(v)} - H_j^{(v-1)} \right| \le \varepsilon$$

$$\max_j \left| h_j^{(v)} - h_j^{(v-1)} \right| \le \varepsilon, \qquad \max_j \left| H_j^{(v)} - H_j^{(v-1)} \right| \le \varepsilon,$$

где v — номер итерации, $\varepsilon > 0$ — заданное малое число.

Решив задачу (1)-(3) в промежутке $[0, T_0]$ при существующих значениях инфильтрации $f_b(x,y,t)$, определяем $h(x,y,T_0)$ и $H(x,y,T_0)$. Затем, используя «начальные» условия (8), решаем ретроспективную задачу (7)-(9). Эта задача решается на той же сетке, по тому же алгоритму, что и задача (1)-(3), но в обратном направлении переменной t. В результате получаем поле функции ψ(x,y,t) и по формуле (6) находим управление $f_b(x,y,t)$, а соответствующие УГВ определяются из задачи (1-3). Эта процедура составляет первую итерацию задачи оптимального управления. На последующих итерациях описанная процедура повторяется при значениях управления $f_b(x,y,t)$, полученных из предыдущей итерации. Процесс продолжается до выполнения условия

$\max_i |h(x_i, y_i, T_0) - \varphi(x_i, y_i)| \le \delta$, где $\delta > 0$ — заданное число.

Выводы

В настоящее время оптимальное управление грунтовых вод является актуальным, поэтому требуется произвести глобальное исследование по этой теме. Предложенный алгоритм позволяет найти решения прогнозных и оптимизационных задач, на ряде плановых стационарных и нестационарных моделей течения подземных вод в многослойных пластах.

Автор выражает благодарность и признательность всем, кто был задействован в исследовательской работе. Огромное спасибо за Ваш труд. Берегите близких!

Список литературы:

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 656 с.
2. Мурзакматов М. У., Маданбекова Э. Э. Задача оптимального управления уровнем грунтовых вод в слоистых пластах // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2011. №24. С. 154-159.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. Мурзакматов М. У., Маданбекова Э. Э. Применение метода конечных элементов к решению задач установившейся фильтрации в многослойных пластах // Вестник ИГУ. 2005. №15. С. 73-77.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

References:

1. Polubarinova-Kochina, P. Ya. (1977). Teoriya dvizheniya gruntovykh vod. Moscow. (in Russian).
2. Murzakmatov, M. U., & Madanbekova, E. E. (2011). Zadacha optimal'nogo upravleniya urovnem gruntovykh vod v sloistykh plastakh. *Izvestiya KGTU im. I. Razzakova,* (24), 154-159. (in Russian).
3. Segerlind, L. (1979). Primenenie metoda konechnykh elementov. Moscow. (in Russian).
4. Murzakmatov, M. U., & Madanbekova, E. E. (2005). Primenenie metoda konechnykh elementov k resheniyu zadach ustanovivsheisya fil'tratsii v mnogosloinykh plastakh. *Vestnik IGU,* (15), 73-77. (in Russian).
5. Samarskii, A. A. (1977). Teoriya raznostnykh skhem. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 18.04.2022 г.

Принята к публикации 23.04.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Маданбекова Э. Э. Алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления уровнем грунтовых вод при слоистом строении водоносных пластов // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №6. С. 89-94. https://doi.org/10.33619/2414-2948/79/11

Cite as (APA):

Madanbekova, E. (2022). Algorithms for the Approximate Solution of Optimal Control Problem for the Groundwater Level in the Layered Structure of the Aquifer. *Bulletin of Science and Practice, 8*(6), 89-94. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/79/11