ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 519.633 https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/01

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ТЕЛЕГРАФНОМУ УРАВНЕНИЮ

*©**Курманалиева Г. С.,** ORCID: 0000-0002-8958-1678, SPIN-код: 4147-7784,*
Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева,
г. Ош, Кыргызстан, gulzat-kurmanalieva@mail.ru

THEORETICAL FOUNDATIONS FOR APPLICATION OF THE DIRECT AND INVERSE LAPLACE TRANSFORM TO THE TELEGRAPHER EQUATION

*©**Kurmanalieva G.,** ORCID: 0000-0002-8958-1678, SPIN-code: 4147-7784,*
Osh Technological University named by M.M. Adyshev,
Osh, Kyrgyzstan, gulzat-kurmanalieva@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрено применение обращения преобразования Лапласа к задачам телеграфного уравнения гиперболического типа и параболического типа с мгновенным источником и плоской границей. Применение преобразования Лапласа к решению гиперболических и параболических задач имеет ряд преимуществ в отличии от классических методов интегрирования вышеуказанных задач. Теоретически исследовано применение прямого преобразования к коэффициентной обратной задаче параболического уравнения и обратное преобразование к коэффициентной обратной задаче гиперболического типа. Обоснованы единственность и устойчивость решения этих двух обратных задач и они взаимно эквивалентны.

Abstract. In this article, we have considered the application of the inversion of the Laplace transform to problems of the telegrapher equation of hyperbolic type and parabolic type with an instantaneous source and a flat boundary. The application of the Laplace transform to the solution of hyperbolic and parabolic problems has a number of advantages over the classical methods of integrating the above problems. In this article, the application of the direct transformation to the coefficient inverse problem of a parabolic equation and the inverse transformation to the coefficient inverse problem of the hyperbolic type are theoretically investigated. The uniqueness and stability of the solution of these two inverse problems is substantiated and they are mutually equivalent.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, гиперболическое уравнение, телеграфные уравнения, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, эквивалентность.

Keywords: inverse problem, parabolic equation, hyperbolic equation, telegrapher's equations, Laplace transform, inverse Laplace transform, equivalence.

Введение

Численные методы обращения преобразовании Лапласа наиболее полно описаны в работе [1].

В работах Н. И. Порошиной, В. М. Рябова [2, 3] изложены о методах обращения преобразования Лапласа и их сравнения для некоторых специальных функций.

В диссертационной работе Н. И. Лещенко разработаны и исследованы приближенные методы обращения преобразования Лапласа к изображениям функций специального вида и они использованы для нахождения напряжения и деформации вязкоупругих материалов [4].

В статье рассмотрено практическое приложение метода обращения преобразования Лапласа и предложена интегральная модель теплопереноса и разработан численный метод определения температуры [5]. Здесь с помощью преобразования Лапласа задача сводится интегральному уравнению Вольтерра, характеризующему прямую зависимость неизвестной граничной функции от исходных данных.

Авторами Н. Н. Яремко, В. Д. Селютина и Е. Г. Журавлева в работе получены новые формулы для прямого и обратного интегрального преобразования Фурье, двухстороннего преобразования Лапласа, которые могут быть основой для создания устойчивых вычислительных алгоритмов [6].

Необходимо отметить, что здесь формулы обращения интегральных преобразований Лапласа не содержат производных. А состоят из системы ортогональных полиномов Эрмита.

В книге крупного математика профессора Фрейбургского университета Густава Деча рассмотрено практическое применение преобразования Лапласа в широком смысле, для задач математики и техники [7]. Изложено также Z-преобразования и его применения к импульсным системам.

Материал и методы исследования

Во многих задачах дифференциальных уравнений (ДУ) и ДУ в частных производных, физики и механики, астрофизики и геофизики решение ищется с применением преобразования Лапласа. Основным затруднением применения преобразования Лапласа, особенно при решении уравнений математической физики, состоит в том, что при нахождении функции оригинала по ее изображению невозможно решить аналитически, т. е. в этом случае необходимо разработать численные методы решения. Отметим, что не существует общий численный метод обращения преобразования Лапласа, т. е. для каждой задачи разрабатываются свои численные решения, учитывающие специфику задачи и функции оригинала. А именно от изображения искомого оригинала зависит выбор численного решения задачи.

Метод интегральных преобразований является одним из наиболее действенных методов решения модельных задач математической физики, техники, фильтрации сигналов. В перечисленных источниках о преобразованиях Лапласа мы не нашли о применении обращения преобразовании Лапласа к задачам телеграфного уравнения гиперболического типа и параболического типа с мгновенным источником и плоской границей. Применения преобразования Лапласа к указанным задачам возникли при решении прямых и обратных задач телеграфного уравнения гиперболического и параболического типов [8–12].

В данной статье осуществлено применение преобразования Лапласа к этим задачам и теоретически обосновано при определенных условиях. Применение преобразования Лапласа к решению гиперболических и параболических задач имеет ряд преимуществ от классических методов интегрирования вышеуказанных задач.

Первое преимущество — это оно однотипно, способ решения прямая.

Второе преимущество — оно имеет в хорошем решении при начальных и граничных условиях.

Третья — для многих задач оно имеет много подробных готовых таблиц изображений.

Результаты и обсуждение

Постановка задачи. При доказательстве существовании, единственности решений, а также при численных решений прямой задачи (конечно-разностным методом), при численных решений обратных задач (конечно-разностным регуляризованным методом) обобщенных задач распространения потенциала действий по нервному волокну телеграфного уравнения:

параболического типа:

$$C_m(x)u_t'(x,t)=\frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)}u_{xx}(x,t)-\frac{u(x,t)}{\rho_m(x)l},\quad (x,t)\in R_+^2, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t<0}\equiv 0,\qquad u_x'(x,t)\big|_{x=0}=h_0\theta(t)+r_0\theta_1(t)+p_0\theta_2(t), \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=g(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

гиперболического типа:

$$C_mV_{tt}(x,t)=\frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)}V_{xx}(x,t)-\frac{V(x,t)}{\rho_m(x)\cdot l},\ (x,t)\in R^2, \tag{4}$$

$$V(x,t)\big|_{t<0}\equiv 0,\ \left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0\delta(t)+r_0\theta(t)+p_0\theta_1(t), \tag{5}$$

$$V(x,t)\big|_{x=0}=f(t),\quad t\in[0,T]. \tag{6}$$

где h_0, r_0, p_0 — заданные положительные числа, $C_m(x)$ — емкость на единицу площади мембраны, $r_a(x)$ — радиус нервного волокна, $\rho_m(x)$, $\rho_a(x)$ — удельное сопротивление плазмы и нервного волокна, l — толщина мембраны, a, m — индексы аксоны и мембраны, $u(x,t)$ — внутриклеточный потенциал действий, $\theta(t)$ — тета функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта функция Дирака, $V(x,t)$ — скорость внутриклеточного потенциала.

Связь между решениями задачи параболического типа (1)–(3) и гиперболического типа (4)–(6) преобразованием Лапласа:

$$u(x,t)=\int_0^\infty V(x,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$g(t)=\int_0^\infty f(\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau, \tag{8}$$

где $G(t,\tau)=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot\exp\left(\tau^2/4t\right)$ — функция Грина.

Целью данной статьи является теоретически обосновать обращения преобразования Лапласа (7) и (8).

Отметим, что формулы (7) и (8) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями (1)–(3) и (4)–(6). Отсюда следует, что теоремы единственности и устойчивости, обоснованные для коэффициентных обратных задач (4)–(6) могут быть перенесены на соответствующие коэффициентные обратные задачи (1)–(3).

Формула (7) является прямым преобразованием Лапласа. А обратным преобразованием Лапласа будет:

$$V(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}u(x,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau, \tag{9}$$

где σ — некоторое вещественное число.

При численных решениях часто используют дискретные преобразования Лапласа

$$u_d(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u(x,n\tau)\delta(t-n\tau), \tag{10}$$

где $n\tau$ — дискретные моменты времени, n — целое число, τ — период дискретизации.

Тогда D — дискретное преобразование Лапласа будет:

$$D\{u_d(x,t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}u(x,n\tau)\cdot G_{tt}(t,n\tau), \tag{11}$$

Обратное преобразование Лапласа (9) существует при следующем достаточном условии:

Если изображение $u(x,t)$ аналитичная при $\sigma>\sigma_a$ и имеет порядок меньше $\delta 1$, то обратное преобразование Лапласа существует и непрерывно для всех значений аргумента и $L\{u(x,\tau)\}=0,\ при\quad \tau<0.$

Покажем связь задачи (1)–(3) и (4)–(6) по преобразовании Лапласа (7) и (8).

Предположим, что коэффициенты уравнений $r_a(x)/(2\rho_a(x)\cdot C_m(x)),\ 1/(l\cdot\rho_m(x)\cdot C_m(x))$ растут не быстрее чем функции $Ce^{\alpha t}$ при $t\to\infty$, где C,α — положительно-постоянные и $g(t)=\int_0^{\infty}f(\tau)G(t,\tau)d\tau,\quad G(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$

Тогда проделаем следующие выкладки

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}V(x,\tau)G_t(t,\tau)d\tau=\left|G_t=G_{\tau\tau}\right|=\int_0^{\infty}V(x,\tau)G_{\tau\tau}(t,\tau)d\tau=V(x,t)G_{\tau}(t,\tau)\Big|-V(x,t)G(t,\tau)+$$

$$+\int_0^{\infty}V_{\tau\tau}(x,\tau)G(t,\tau)d\tau=\int_0^{\infty}V_{\tau\tau}(x,\tau)G(t,\tau)d\tau.$$

$$\frac{r_a(x)}{(2\rho_a(x)C_m(x))}u_{xx}''(x,t)-\frac{1}{l\cdot\rho_m(x)C_m(x)}\cdot u(x,t)=$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\frac{r_a(x)}{(2\rho_a(x)\cdot C_m(x))}V_{xx}''(x,\tau)-\frac{1}{l\cdot\rho_m(x)C_m(x)}V(x,\tau)\right]G(t,\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{r_a(x)}{(2\rho_a(x)\cdot C_m(x))}V_{xx}''(x,\tau)\cdot G(t,\tau)d\tau-\int_0^{\infty}\frac{1}{l\cdot\rho_m(x)C_m(x)}V(x,\tau)G(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда, при $t\in R_+$ получим

$$u_t(x,t)-\frac{r_a(x)}{(2\rho_a(x)C_m(x))}u_{xx}{}''(x,t)-\frac{1}{l\cdot\rho_m(x)C_m(x)}\cdot u(x,t)=$$

$$=\int_0^\infty\left\{V_{\tau\tau}(x,\tau)-\frac{r_a(x)}{(2\rho_a(x)C_m(x))}V_{xx}{}''(x,\tau)-\frac{V(x,\tau)}{l\cdot\rho_m(x)C_m(x)}\right\}G(t,\tau)d\tau,$$

$$u(0,t)=\lim_{t\to 0}\int_0^\infty V(0,\tau)G(t,\tau)d\tau=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^\infty V\left(0,2\sqrt{t\tau}\right)e^{-\tau}d\tau=V(o,t)=g(t).$$

Таким образом, от параболического уравнения можно получить гиперболическое уравнение.

На практике часто используют Z — преобразования Лапласа.

$$Z\{u_z(x,t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}u(x,n\tau)G_{tt}(t,n\tau). \qquad (12)$$

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при точке $\sigma=\sigma_0$, то существует предел

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b|V(x,\tau)|G_{tt}(t,\tau)d\tau=\int_0^\infty|V(x,\tau)|G_{tt}(t,\tau)d\tau.$$

Тогда интеграл Лапласа (9) сходится абсолютно и равномерно для $\sigma\geq\sigma_0$ и σ — действительная часть.

Прямое преобразование Лапласа (7) существует при следующих случаях:

1. Преобразование Лапласа существует если существует интеграл

$$\int_0^\infty|V(x,\tau)|d\tau, \qquad (13)$$

О существовании решения $V(x,t)$ — нами доказано в статье [9].

2. Преобразование Лапласа существует, если интеграл $\int_0^{\tau_1}|V(x,\tau)|d\tau$ существует для каждого конечного $\tau_1>0$ и $|V(x,\tau)|\leq ke^{\sigma_a\tau}$, для $\tau>\tau_2\geq 0$.

3. Преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции $V_\tau(x,\tau)$ для $\sigma>0$.

Достаточное условие преобразования Лапласа:

1. Для любого положительного T функция $V(x,t)$ — кусочно непрерывная функция на интервале $t\in[0,T]$, $x\in R_+$.

2. Существуют положительные числа μ, T *и* α, что $|V(x,t)|\leq\mu e^{\alpha t}$, $\forall t>T$.

Тогда преобразование Лапласа $L[V(x,t)]=F[u(x,s)]=\int_0^\infty V(x,t)e^{-st}dt$ существует при всех $s>\alpha$. В формуле (7) $u(x,t)$ — изображение, а $V(x,t)$ — оригинал.

Оригинал $V(x,t)$ удовлетворяет следующие три условия:

1. $V(x,t)\equiv 0$ *при* $t<0$, первая формула (5),

2. $V(x,t)$ удовлетворяет условию Липщица-Гельдера:

$\forall t>0\ \ \exists A>0$ *и* $\exists\alpha:0<\alpha\le 1$ *и* $\exists h>0\ \left|V(x,t+h)-V(x,t)\right|\le A|h|^{\alpha}$, где h — шаг сетки, а у нас $A=\exp\left[2\frac{\bar{s}}{\underline{s}}+h^2\bar{d}\right]$

3. Функция $V(x,t)$ возрастает не быстрее показательной функции Грина $G(t,\tau)$.

С физической точки зрения и процессов последнее условие всегда справедливо.

Дифференцирование изображения:

$$u^{(n)}(x,t)=(-t)^n\cdot V(x,t)$$

Интегрирование изображения:

$$\frac{u(x,t)}{t}=\int_0^{\infty}L\{V(x,\tau)\}d\tau$$

Интегрирование оригинала: $\int_0^t V(x,\tau)d\tau=\frac{L\{u(x,t)\}}{t}$.

Прежде всего, для того чтобы применить прямое преобразование Лапласа для обратной задачи параболического уравнения (1)–(3) и обратное преобразование для обратной задачи гиперболического уравнения (4)–(6) устанавливаем некоторые утверждения.

Теорема 1. Пусть $f(t), V(x,t)\in L(0,\infty)$, $\forall x\in R_{\infty}$ и ее преобразования Лапласа равно $F[u(x,p)]=\int_0^{\infty}V(x,\tau)\cdot G_{tt}(x,\tau)d\tau$, $F[g(p)]=\int_0^{\infty}f(\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau$; $G(t,\tau)=\exp\left(\tau^2/4t\right)\cdot\left[-1/\sqrt{\pi t}\right]$.

Тогда для любого $t>0$ имеет место формула обращение

$$V(x,t)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!}\int_0^{\infty}G(t,p)p^{2n-1}F^{(n)}[u(x,p)]dp,$$

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n!(n-2)!}\int_0^{\infty}G(t,p)p^{2n-1}F^{(n)}[g(p)]dp.$$

Теорема 2. Если $V(x,t)$, $f(t)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0,T]$ *при* $T>0$ и интегралы $\int_0^{\infty}V(x,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau=F[u(x,p)]$ и $\int_0^{\infty}f(\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau=F[g(p)]$ абсолютно сходятся при некотором p, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)}{n!}t_n^{n+1}F^{(n)}[u(x,p_n)]=\frac{1}{2}[u(x,t+0)+u(x,t-0)],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)}{n!}t_n^{n+1}F^{(n)}[g(p_n)]=\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)],$$

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t),\ \ u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t),$$

$$f_n(t)=\frac{1}{t(n-2)!}\int_0^{\infty}F\left[g(p/\tau)\cdot G_{tt}(t,\tau)p^{n-1}L_n(p,n-1)\right]d\tau.$$

Доказательство теоремы 1 и теоремы 2 можно найти в [13, 14].

Для применения обратного преобразования Лапласа [15, с. 69] к параболической задаче (1)–(3), обозначим

$$c^2(x)=\frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)C_m(x)},\quad b(x)=\frac{1}{\rho_m(x)\cdot l\cdot C_m(x)}\ \text{(для сокращения)}$$

$$u(x,p)=\int_0^\infty V(x,\tau)G_{\tau\tau}(x,p\tau)d\tau.$$

Применяем преобразования Лапласа по t к уравнению (1)

$$p\cdot u=c^2(x)\frac{d^2u}{dx^2}-b(x)u=0,$$

Общее решение уравнение имеет вид

$$u(x,p)=Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},\quad при\quad p\to\infty,\ B=0.$$

$$\left.\frac{du(x,p)}{dx}\right|_{x=0}=-A\frac{\sqrt{p+b}}{b}\left.e^{\frac{\sqrt{p+b}}{a}x}\right|_{x=0}=\frac{c(0)(h_0\delta(0)+r_0\theta(0)+p_0\theta_1(0))}{p\sqrt{p+b(0)}};$$

Отсюда $A=-\frac{b(0)}{\sqrt{p+b(0)}}*\frac{c(0)[h_0\delta(t)+r_0\theta(p)+p_0\theta_1(p)]}{p\sqrt{p+b(0)}}$.

Известно, что $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}=\frac{e^{-\sqrt{p\tau}}}{\sqrt{p}}$. Тогда $\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}\tau^2}{c}}}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{\tau^2}{4ct}}$. С учетом смещений

$$\frac{c}{\sqrt{p+b}}e^{\frac{\sqrt{p+b}}{c}\tau}=\frac{c}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{\tau^2}{4ct}}\cdot e^{-ct}.$$

$$u(x,t)=C\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{4ct}}e^{-c\tau}\cdot V(x,\tau)d\tau. \tag{14}$$

Применим преобразования Лапласа [16, с. 323] к задаче гиперболического уравнения (4)–(6). Для численного решения обратной задачи гиперболического типа решения (4)–(6) представим в виде:

$$V(x,t)=A\cdot\exp\left[-\frac{x}{c}\sqrt{c^2(x)b^2(x)-\omega^2}-i\omega t\right].$$

Решение уравнения с неоднородным граничным условием будет

$$G(x,0,\omega)=\frac{c(x)}{c^2(x)\sqrt{p^2+c^2(x)b(x)}}\cdot\exp\left[-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+b^2c^2}\right],\quad p=i\omega.$$

По таблице преобразования Лапласа находим импульсную функцию (x=0):

$$G(x,0,t)=\begin{cases}\frac{1}{c(x)}\cdot J_0\left[c(x)\cdot b(x)\sqrt{t^2-(x/c)^2}\right], & t>\frac{x}{c}\\ 0, & t<\frac{x}{c}\end{cases}$$

Тогда решение (4)–(6) выражается интегралом (вместо $c(x)$ *и* $b(x)$ставим свои значения)

$$V(x,t)=\frac{1}{c(x)}\int_0^{t-x/c} u(x,\tau)\cdot J_0\left[c(x)b(x)\sqrt{(t-\tau)^2-\left(x/c\right)^2}\right]d\tau=\frac{2\rho_a(x)C_m(x)}{r_a(x)}\int_0^{t-x/c} u(x,\tau)\times \tag{15}$$

$$\times J_0\left[\sqrt{\frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)\cdot C_m(x)}}\cdot\frac{1}{\rho_m(x)C_m(x)}\cdot\sqrt{(t-\tau)^2-\left(x^2\cdot\frac{2\rho_a(x)C_m(x)}{r_a(x)}\right)}\right]d\tau.$$

Интеграл проводится до $t-x/c$, т. е. $t-x\Big/\sqrt{\dfrac{r_a(x)}{2\rho_a(x)C_m(x)}}$.

Вывод

Таким образом, в данной статье обосновано применение преобразования Лапласа к обратной задаче телеграфного уравнения параболического типа и обратное преобразование Лапласа к обратной задаче телеграфного уравнения гиперболического типа. Более того, что единственность и устойчивость решения обратной задачи гиперболического уравнения эквивалентно единственности и устойчивости решения обратной задачи параболического уравнения.

Список литературы:

1. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., 1974. 224 с.

2. Порошина Н. И., Рябов В. М. О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 2011. №3. С. 55-61.

3. Порошина Н. И., Рябов В. М. Об обращении преобразования Лапласа некоторых специальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 2009. №3. С. 50-60.

4. Лещенко Н. И. Численное обращения интегральные преобразования Лапласа функций специального вида: автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук. СПб. 2017. 16 с.

5. Япарова Н. М., Гаврилова Т. П. Численный метод прогнозирования температуры с помощью уравнения Вольтерра // Труды Международной конференции «АПВПМ». 2019. №2019. С. 570-574. https://doi.org/10.24411/9999-016A-2019-10090

6. Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Журавлева Е. Г. Новые формулы обращения для интегральных преобразований Лапласа, Вейерштрасса и Меллина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. №1 (45). С. 24-35. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-1-2

7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., 1971. 288 с.

8. Сатыбаев А. Д., Курманалиева Г. С. Единственность решения двумерной прямой задачи распространения потенциала действий по нервному волокну // Вестник КРСУ. 2019. Т. 19. №4. С. 19-25.

9. Satybaev A. J., Kurmanalieva G. S. The existence of a solution of the two-dimensional direct problem of propagation of the action potential along nerve fibers // Filomat. 2019. V. 33. №5. P. 1287-1300. https://doi.org/10.2298/FIL1905287S

10. Сатыбаев А. Д., Курманалиева Г. С. Численный метод решения двумерной прямой задачи распространения потенциала действий по нервному волокну// Проблемы автоматики и управления. 2019. Т 37. №2. С. 99-109. https://doi.org/10.5281/zenodo.3594804

11. Курманалиева Г. С., Сатыбаев А. Д. Разработка численного алгоритма определения коэффициентов одномерной обобщенной обратной задачи распространения потенциала действий по нервному волокну // Проблемы автоматики и управления. 2021. Т 42. №3. С. 67-75.

12. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009. 457 с.

13. Widder D. V. The Laplace transform. Princeton. 1946. 406 p. https://doi.org/10.2307/1990701

14. Порошина Н. И., Рябов В. М. О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2011. №3. С. 55-64.

15. Крайнов А. Ю., Рыжих Ю. Н. Операционные исчисления. Примеры и задачи. Томск, 2007. 104 с.

16. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Рипол Классик, 2013.

References:

1. Krylov, V. I., & Skoblya, N. S. (1974). Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa. Moscow. (in Russian).

2. Poroshina, N. I., & Ryabov, V. M. (2011). O metodakh obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika, astronomiya,* (3), 55-61. (in Russian).

3. Poroshina, N. I., & Ryabov, V. M. (2009). Ob obrashchenii preobrazovaniya Laplasa nekotorykh spetsial'nykh funktsii. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika, astronomiya,* (3), 50-60. (in Russian).

4. Leshchenko, N. I. (2017). Chislennoe obrashcheniya integral'nye preobrazovaniya Laplasa funktsii spetsial'nogo vida: authoref. Ph.D. diss. St. Petersburg. (in Russian).

5. Yaparova, N. M., & Gavrilova, T. P. (2019). Chislennyi metod prognozirovaniya temperatury s pomoshch'yu uravneniya Vol'terra. *Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii “APVPM”, 2019,* 570-574. (in Russian). https://doi.org/10.24411/9999-016A-2019-10090

6. Yaremko, N. N., Selyutin, V. D., & Zhuravleva, E. G. (2018). Novye formuly obrashcheniya dlya integral'nykh preobrazovanii Laplasa, Veiershtrassa i Mellina. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki,* (1 (45)), 24-35. (in Russian). https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-1-2

7. Dech, G. (1971). Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniya. Izd: Nauka, glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury. Moscow. (in Russian).

8. Satybaev, A. D., & Kurmanalieva, G. S. (2019). Edinstvennost' resheniya dvumernoi pryamoi zadachi rasprostraneniya potentsiala deistvii po nervnomu voloknu. *Vestnik KRSU, 19*(4), 19-25. (in Russian).

9. Satybaev, A. J., & Kurmanalieva, G. S. (2019). The existence of a solution of the two-dimensional direct problem of propagation of the action potential along nerve fibers. *Filomat*, *33*(5), 1287-1300. https://doi.org/10.2298/FIL1905287S

10. Satybaev, A. D., & Kurmanalieva, G. S. (2019). Chislennyi metod resheniya dvumernoi pryamoi zadachi rasprostraneniya potentsiala deistvii po nervnomu voloknu. *Problemy avtomatiki i upravleniya,* (2), 99-109. https://doi.org/10.5281/zenodo.3594804

11. Kurmanalieva, G., & Satybaev, A. (2021). Razrabotka chislennogo algoritma opredeleniya koeffitsientov odnomernoi obobshchennoi obratnoi zadachi rasprostraneniya potentsiala deistvii po nervnomu voloknu. *Problemy avtomatiki i upravleniya,* (3), 67-75. (in Russian).

12. Kabanikhin, S. I. (2009). Obratnye i nekorrektnye zadachi. Novosibirsk. (in Russian).

13. Widder, D. V. (1946). The Laplace transform. Princeton. https://doi.org/10.2307/1990701

14. Poroshina, N. I., & Ryabov, V. M. (2011). O metodakh obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. *Matematika. Mekhanika. Astronomiya,* (3), 55-64. (in Russian).

15. Krainov, A. Yu., & Ryzhikh, Yu. N. (2007). Operatsionnye ischisleniya. Primery i zadachi. Tomsk. (in Russian).

16. Mors, F. M., & Feshbakh, G. (2013). Metody teoreticheskoi fiziki. Ripol Klassik.

Работа поступила в редакцию 18.03.2022 г.

Принята к публикации 23.03.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Курманалиева Г. С. Теоретические основы применения прямого и обратного преобразования Лапласа к телеграфному уравнению // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 12-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/01

Cite as (APA):

Kurmanalieva, G. (2022). Theoretical Foundations for Application of the Direct and Inverse Laplace Transform to the Telegrapher Equation. *Bulletin of Science and Practice, 8*(4), 12-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/01