ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.968 https://doi.org/10.33619/2414-2948/76/01

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА

*©**Беделова Н. С.,** ORCID:0000-0002-4248-4563, SPIN-код: 1451-1901, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kireshe78@gmail.com*
*©**Асанов А.,** ORCID:0000-0001-5678-6784, SPIN-код: 1273-1704, д-р физ.-мат. наук, Киргизско-Турецкий университет Манас, г. Бишкек, Кыргызстан, avyt.asanov@manas.edu.kg*
*©**Орозмаматова Ж.,** ORCID: 0000-0007-4578-6739, SPIN-код: 1562-1802, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, jypar@mail.ru*

REGULARIZATION AND PARAMETER CHOICE FOR THE THIRD KIND NONLINEAR VOLTERRA-STIELTJES INTEGRAL EQUATION SOLUTIONS

*©**Bedelova N.,** ORCID:0000-0002-4248-4563, SPIN-code: 1451-1901, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kireshe78@gmail.com*
*©**Asanov A.,** ORCID:0000-0001-5678-6784, SPIN-code: 1273-1704, Dr. habil., Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan, avyt.asanov@manas.edu.kg*
*©**Orozmamatova Zh.,** ORCID: 0000-0007-4578-6739, SPIN code: 1562-1802, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, jypar@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. Для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву, доказана теорема единственности и выбран параметр регуляризации. При исследовании применяются понятие производной по возрастающей функции, метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений. Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса высоких порядков, также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины, теории управления сложными системами. Могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в классах некорректных задач, для численного решения интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. А также при решении конкретных прикладных задач, приводящихся к уравнениям третьего рода.

Abstract. The article considers nonlinear Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind, and its solution by regularizing operator according to M. M. Lavrentev. A uniqueness theorem was proved, and a regularization parameter was chosen. The research uses the concept of a derivative with respect to an increasing function, the method of regularization according to M. M. Lavrentevs methods in functional analysis, methods of transformation of equations, methods of integral and differential equations. Proposed methods can be used to study the integral, integral-differential equations of the Volterra-Stieltjes type of high orders, as well as in the qualitative study of some applied processes in the field of physics, ecology, medicine, and the theory of control complex systems. They can be used in the further development of the theory of integral equations in classes of incorrect problems, in numerical solution of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind, and when solving specific applied problems that lead to equations of the third kind.

Ключевые слова: регуляризация, решения, нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса, третий род, выбор параметра регуляризации.

Keywords: regularization, solutions, nonlinear Volterra-Stieltjes integral equations, third kind, choice of regularization parameter.

Введение

В общем случае интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса не всегда сводится к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стилтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега. Поэтому изучение интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса представляют самостоятельный интерес.

Материал и методы исследования

В работе используется метод регуляризации по М. М. Лаврентьеву, выбран параметр регуляризации, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и дифференциальных уравнений. Выбором параметра получена оптимальная оценка приближенного решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

Рассмотрим уравнение:

$$m(t)\,\upsilon(t) + \int_{t_0}^{t} K\big(t, s, \upsilon(s)\big)d\varphi(s) = f(t), \quad t\epsilon\big[t_{0,}\ \ T\big], \quad T > t_0 \tag{1}$$

где K(t,s,υ), f(t), m(t)-заданные функции, $m(t_0)=0$, m(t)-неубывающая непрерывная функция на [t_0, T], $\upsilon(t)$-неизвестная функция на [t_0, T], $\varphi(t)$-возрастающая непрерывная функция на [t_0, T].

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение:

$$\big(\varepsilon + m(t)\big)\vartheta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K\big(t, s, \upsilon(s,\varepsilon)\big)d\varphi(s) = f(t) + \varepsilon u(t_0), \quad t\epsilon[t_0, T], \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$–малый параметр, $(t,s)\in$G=$\{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$.

Всюду будем предполагать, что $K(t,s,u)$представимо в виде:

$$K(t,s,u) = K_0(t,s)u + K_1(t,s,u), \quad \text{где} \ \ (t,s,u) \in G \times R. \tag{3}$$

Различные вопросы теории интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в [1] исследованы линейные интегральные уравнения второго рода и их системы на конечных и бесконечных интервалах. В [2] дан обзор результатов по интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. В [3] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [4], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В работах [5] и [6] исследованы уравнения Вольтерра первого рода и обратные задачи. В [7] и [8] доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с негладкими матричными ядрами. В [9] для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В [10] для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В [11] на основе нового подхода исследованы вопросы существования и единственности решения для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с особенностью в одной точке на конечном промежутке. В [12] на основе подхода предложенного в [11] изучен класс интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на конечном промежутке. В работах [13] и [14] на основе подходов предложенных в [11] и [12], разработан улучшенный новый подход исследования систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями на конечном промежутке. В работе [15], на основе понятия производная функции по возрастающей функции введенный в [14], исследовались линейные и нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого и второго родов. В [16] для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности. В [17] выбран параметр регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. Здесь для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода (1) построен регуляризирующий оператор по М. М. Лаврентьеву, доказана теорема единственности и выбран параметр регуляризации.

Предположим выполнения следующих условий:

а) $K(t,s)\in C(G)$, $K_0(t,t)\in C[t_0,T]$, $K_0(t,t)\geq 0$ *при* $t\in[t_0,T]$;

б) при $t>\tau$ для любых $(t,s),(\tau,s)\in G$ справедлива оценка

$$|K_0(t,s)-K_0(\tau,s)|\leq l_1\left[\int_\tau^t K_0(s,s)d\varphi(s)+m(t)\right],$$

где l_1 — известное неотрицательное число.

с) $K_1(t,t,u)=0,\ (t,u)\in[t_0,T]\times R,\ K_1(t,s,0)=0$ при$(t,s)\in G,$ при $t>\tau$ для любых $(t,s,u_1),(\tau,s,u_1),(t,s,u_2),(\tau,s,u_2)\in G\times R$ справедлива оценка

$$|K_1(t,s,u_1)-K_1(\tau,s,u_1)-K(t,s,u_2)+K(\tau,s,u_2)|\leq l_2\left[\int_\tau^t K_0(s,s)d\varphi(s)+m(t)\right]|u_1-u_2|,$$

где l_2 — известное неотрицательное число. Здесь $C[t_0,T]$ — пространство всех непрерывных функций $\upsilon(t)$, определенных на $[t_0,T]$ с нормой $\|\upsilon(t)\|_C=\max\limits_{t\in[t_0,T]}\|\upsilon(t)\|$.

Будем обозначать $C_\psi^\gamma[t_0,T], 0<\gamma\leq 1$ линейное пространство всех функций $\upsilon(t)$, определенных на $[t_0,T]$ и удовлетворяющих условию

$$|\upsilon(t)-\upsilon(s)|\leq M|\psi(t)-\psi(s)|^\gamma \quad , \quad \psi(t)=\int_{t_0}^t K_0(s,s)d\varphi(s)+m(t),$$

где M-положительная постоянная, зависящая от $\upsilon(t)$, но не от t и s.

В дальнейшем используются следующие леммы 1, 2 и 3.

Лемма 1. Пусть выполняются условия а) и

$$F(t,\varepsilon)=-\frac{\varepsilon\upsilon(t)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\frac{\varepsilon[\upsilon(t)-\upsilon(s)]}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s). \quad (4)$$

где $\upsilon(t)\epsilon C_{\psi}^{\gamma}[t_0,T]$, $0<\gamma<1$, $\upsilon(t_0)=0$, Тогда

$$\left\|F(t,\varepsilon)\right\|_c \le M(M_1+M_2)e\varepsilon^{\gamma}, \quad (5)$$

где $M=\sup\limits_{t,s\in[t_0,T]}|\upsilon(t)-\upsilon(s)|/\ |\psi(t)-\psi(s)|^{\gamma}$ $M_1=\sup\limits_{\mu\ge0}[\mu^{\gamma}e^{-\mu}], M_2=\int_0^{\infty}e^{-z}z^{\gamma}dz.$

Доказательство. Пусть $\upsilon(t)\in C_{\psi}^{\gamma}[t_0,T]$, $0\le\gamma\le1$. Тогда оценим первый член формулы (4):

$$\left|\frac{\varepsilon[\upsilon(t)-\upsilon(t_0)]}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\right|\le\frac{\varepsilon M[\psi(t)]^{\gamma}}{\varepsilon+m(t)}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t}K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)}= \quad (6)$$

$$=\frac{M\varepsilon^{1-\gamma}\varepsilon^{\gamma}}{[\varepsilon+m(t)]^{1-\gamma}}[\frac{\psi(t)}{\varepsilon+m(t)}]^{\gamma}ee^{-\frac{\psi(t)}{\varepsilon+m(t)}}\le MM_1e\varepsilon^{\gamma},\quad t\in[t_0,T].$$

Оценим вторую член (4):

$$\left|\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\frac{\varepsilon[\upsilon(t)-\upsilon(s)]}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)\right|\le\frac{M\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\times \quad (7)$$

$$\times[m(t)-m(s)+\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)]^{\gamma}d\varphi(s)\le\frac{Me\varepsilon}{[\varepsilon+m(t)]^{1-\gamma}}\int_{t_0}^{t}e^{-[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)]}[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+$$

$$+\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)]^{\gamma}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)=Me\varepsilon^{\gamma}\int_{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}^{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}e^{-z}z^{\gamma}dz\le Me\varepsilon^{\gamma}\int_0^{\infty}e^{-z}z^{\gamma}dz,$$

$$t\in[t_0,T].$$

Учитывая оценки (6), (7), из (4) получим оценку (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условии а), б) и

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]+\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\frac{1}{\varepsilon+m(s)}[K_0(s,\tau)-K_0(\tau,\tau)]d\varphi(s).$$

Тогда справедлива оценка

$$|H_0(t,\tau,\varepsilon)|\le(e+1)l_1,\quad (t,\tau)\in G,\ \varepsilon>0. \quad (8)$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)}-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{\tau}^{t}\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_{s}^{t}\frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\times \quad (9)$$

$$\times[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)]d\varphi(s).$$

В самом деле

$$\int_\tau^t \frac{1}{\varepsilon+m(t)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]d\varphi(s) = \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]\times \tag{10}$$

$$\times e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\Big|_{s=\tau}^{s=t} = \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)] - \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}.$$

Учитывая (10) имеем (9). Далее из (9) получим

$$|H_0(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon+m(t)}|K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)|e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)} + \frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} |[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)]| d\varphi(s) \le$$

$$\le l_1[\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s) + \frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}]ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)} + \frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}} l_1 \times$$

$$\times[\int_s^t K_0(s,s)d\varphi(s) + m(t)]d\varphi(s) \le l_1 e[\sup_{\nu\ge 0}(\nu e^{-\nu}) + l_1 e\int_\tau^t e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} (-1)\times$$

$$\times[\int_s^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s) + \frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}]d_s[\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)} - \int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)] \le l_1 + l_1 e\int_0^\infty e^{-\nu}\nu d\nu = l_1(1+e).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть выполняются условия

$$\text{a), c) и } P(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,u(\tau)+ \tag{11}$$

$$\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau))] + \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} \frac{1}{\varepsilon+m(t)} *$$

$$[K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))] - K_1(s,\tau,u(\tau))]d\varphi(s).$$

Тогда справедлива оценка

$$\left|P\left(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon)\right)\right| \le l_2(1+e)|\xi(\tau,\varepsilon)|, \quad (t,\tau,\xi)\epsilon G\times R, \quad \varepsilon>0. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$P(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(t,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau))]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)} - \tag{13}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)} [K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(t,\varepsilon)) -$$

$$-K_1(t,\tau,u(\tau)) + K_1(s,\tau,u(\tau))]d\varphi(s)$$

В самом деле

$$\int_\tau^t \frac{1}{\varepsilon+m(t)}\cdot\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))]d\varphi(s)=\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\times \tag{14}$$

$$\times[K_1(t,\tau,u(\tau))+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))]e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}\Big|_{s=\tau}^{s=t}=\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$

$$-K_1(t,\tau,u(\tau))]-\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))]e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}.$$

Учитывая (14) из (11) имеем (13).

Далее из (13) получим

$$|P(t,\tau,\xi(\tau,\varepsilon))|\le\frac{1}{\varepsilon+m(t)}|K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(\tau,\tau,u(\tau))|e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}|[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(s,\tau,u(\tau))]|d\varphi(s)\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon+m(t)}l_2\left|\int_\tau^t K_0(q,q)d\varphi(q)+m(t)\right||u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)-u(\tau)|e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}+\frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_\tau^t\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}\times$$

$$\times l_2\left|\int_s^t K_0(q,q)d\varphi(q)+m(t)\right||u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)-u(\tau)|d\varphi(s)\le l_2\{\left[\int_\tau^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}+$$

$$+\int_\tau^t\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}ee^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}e^{-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}\left[\int_s^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]d\varphi(s)\}|\xi(\tau,\varepsilon)|=$$

$$=l_2e\Bigg[(\int_\tau^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)})e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}+\int_\tau^t\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}-\int_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)}\times$$

$$\times(\int_s^t\frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)})d\varphi(s)\Bigg]|\xi(\tau,\varepsilon)|\le l_2e[\sup_{\nu\ge0}(\nu e^{-\nu})+\int_{\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}}^{\int_\tau^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}} e^{-\nu_1}\nu_1 d\nu_1\ ]|\xi(\tau,\varepsilon)|\le$$

$$\le l_2e(e^{-1}+1)|\xi(\tau,\varepsilon)|=l_2(1+e)|\xi(t,\varepsilon)|.$$

Так как $\sup_{\nu\ge0}(\nu e^{-\nu})=\frac{1}{e}$, $\int_0^\infty e^{-\nu}\nu d\nu=1$. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть выполняются условия а) , б), с) и уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C_\psi^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\le1$. Тогда решение $\upsilon(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to0$ сходится по норме $C[t_0,T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|\upsilon(t,\varepsilon)-u(t)\|_c\le KMM_3\varepsilon^\gamma, \tag{15}$$

где $M = \sup\limits_{t,s\in[t_0,T]} \dfrac{|u(t)-u(s)|}{|\psi(t)-\psi(s)|^{\gamma}}$, $M_1 = \sup\limits_{\nu\geq 0}(\nu^{\gamma}e^{-\nu})$, $M_2 = \int\limits_0^{\infty} e^{-z}z^{\gamma}dz$, $M_3 = (M_1+M_2)e$,

$$K = exp\{(1+e)(l_1+l_2)[\varphi(T)-\varphi(t_0)]\}$$

Доказательство. В уравнении (2) сделаем замену

$$\upsilon(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon) \tag{16}$$

где $u(t)$ - решение уравнения (1). Подставляя (16) в (2) имеем

$$\xi(t,\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,s)-K_0(s,s)]\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_1(t,s,u(s)+ \tag{17}$$

$$+\xi(s,\varepsilon)) - K_1(t,s,u(s))]d\varphi(s) = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+m(t)}[u(t)-u(t_0)].$$

Используя резольвенту

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int\limits_s^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)}$$

ядра $[-K_0(s,s)/(\varepsilon+m(t)]$, уравнению (17) сводим к эквивалентному уравнению

$$\xi(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} H_0(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int\limits_{t_0}^{t} P(t,s,\xi(s,\varepsilon))d\varphi(s) + f_0(t,\varepsilon), \quad t\in[t_0,T], \tag{18}$$

где $P(t,s,\xi(s,\varepsilon))$ — определена в лемме 3.]

$$H_0(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)] + \int\limits_{\tau}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}e^{-\int\limits_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)} \frac{1}{\varepsilon+m(t)}[K_0(s,\tau)-K_0(\tau,\tau)]d\varphi(s) \tag{19}$$

$$f_0(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon[u(t)-u(t_0)]}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int\limits_{t_0}^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}e^{-\int\limits_s^t \frac{K_0(q,q)}{\varepsilon+m(q)}d\varphi(q)} \varepsilon\frac{u(t)-u(s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s). \tag{20}$$

Если $u(t)\in C_{\psi}^{\gamma}[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$, то в силу леммы 1 из (20) имеем

$$\| f_0(t,\varepsilon)\|_c \leq MM_3\varepsilon^{\gamma}, \text{ где } M_3 = (M_1+M_2)e \tag{21}$$

Если выполняются условия а) и б), то в силу леммы 2 из (19) получим

$$|H_0(t,\tau,\varepsilon)| \leq (e+1)l_1, \quad (t,\tau)\in G,\ \varepsilon>0 \tag{22}$$

Учитывая леммы 3 и оценки (22), из (18) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \leq \int\limits_{t_0}^{t}[l_1+l_2](1+e^{-1})e|\xi(s,\varepsilon)|d\varphi(s) + |f_0(t,\varepsilon)|, \quad t\in[t_0,T]. \tag{23}$$

В силу оценки (21), и обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [15] из (23) вытекает оценки (15). Теорема 1 доказана.

Следствие. Если выполняются условия а), б), с) и $m(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_0(s,s)d\phi(s) > 0$ *при* $t\in(t_0,T)$ и $\psi(t)$ — строго возрастающая функция при $t\in[t_0,T]$, то решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_{\psi}^{\gamma}[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$.

Т. 8. №3. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/76

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из $C_\psi^\gamma[t_0,T]$. Тогда

$$m(t)u_1(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,u_1(s))d\varphi(s)=m(t)u_2(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s,u_2(s))d\varphi(s),\quad t\in[t_0,T]$$

Отсюда

$$m(t)[u_1(t)-u_2(t)]+\int_{t_0}^{t}K_0(t,s)[u_1(s)-u_2(s)]d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}[K_1(t,s,u_1(s))-K_1(t,s,u_2(s))]d\varphi(s)=0,$$

$$m(t)[u_1(t_0)-u_2(t_0)]+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)[u_1(t_0)-u_2(t_0)]d\varphi(s)+m(t)[u_1(t)-u_2(t)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)[u_1(s)-u_2(s)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))]d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}[K_0(t,s)-K_0(s,s)][u_1(s)-u_2(s)]d\varphi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[K_1(t,s,u_1(s))-K_1(s,s,u_1(s))-K_1(t,s,u_2(s))+K_1(s,s,u_2(s))]d\varphi(s)=0.$$

Далее

$$[m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)]\left|u_1(t_0)-u_2(t_0)\right|\le m(t)\left|u_1(t)-u_2(t)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))\right|+ \tag{24}$$

$$+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)\left|u_1(s)-u_2(s)-u_1(t_0)+u_2(t_0)\right|d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\left|K_0(t,s)-K_0(s,s)\right|\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left|K_1(t,s,u_1(s))-K_1(s,s,u_1(s))-K_1(t,s,u_2(s))+K_1(s,s,u_2(s))\right|d\varphi(s).$$

Из (24) имеем

$$[m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)]\left|u_1(t_0)-u_2(t_0)\right|\le m(t)\left|u_1(t)-u_2(t)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))\right|+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)\times \tag{25}$$

$$\times\sup_{s\in[t_0,t]}\left|u_1(s)-u_2(s)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))\right|+\int_{t_0}^{t}l_1[\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)+m(t)]\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}l_2[\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)+m(t)]\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s),\quad t\in[t_0,T].$$

Деля обе части на $m(t)+\int_{t_0}^{t}K_0(s,s)d\varphi(s)$ из (25) получим

$$\left|u_1(t_0)-u_2(t_0)\right|\le\left|u_1(t)-u_2(t)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))\right|+\sup_{s\in[t_0,t]}\left|u_1(s)-u_2(s)-(u_1(t_0)-u_2(t_0))\right|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}l_1\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}l_2\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s),\quad t\in[t_0,T].$$

Отсюда переходя к пределу при $t\to t_0$ получим $\left|u_1(t_0)-u_2(t_0)\right|=0$ при $t\in[t_0,T]$. Тогда $u_1(t_0)=u_2(t_0)$.

Далее из (15) имеем

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_c \le \|u_1(t)-\upsilon(t,\varepsilon)\|_c + \|\upsilon(t,\varepsilon)-u_2(t)\|_c \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Поэтому $u_1(t)=u_2(t)$, при $t \in [t_0,T]$. Следствие теоремы 1 доказано.

Далее предположим, что дана функция $f_\delta(t) \in C[t_0,T]$ и число u_0, такие

$$\|f(t)-f_\delta(t)\|_c \le \delta, \qquad |u(t_0)-u_0| \le \alpha\delta, \tag{26}$$

где $0<\alpha$ и $0<\delta$ – постоянные числа.

Рассмотрим уравнение

$$(\varepsilon+m(t))\vartheta_\delta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K\left(t,s,\upsilon_\delta(s,\varepsilon)\right) d\varphi(s) = f_\delta(t) + \varepsilon u_0, \;\; t \in [t_0,T]. \tag{27}$$

Из (2) отнимая (27) вводя обозначения

$$u_\delta(t,\varepsilon) = \upsilon(t,\varepsilon) - \upsilon_\delta(t,\varepsilon), \quad t\epsilon[t_0,T], \tag{28}$$

Имеем

$$(\varepsilon+m(t))u_\delta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K_0(t,s)u_\delta(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t} [K_1(t,s,\upsilon(s,\varepsilon)) - K_1(t,s,u_\delta(s,\varepsilon))]d\varphi(s) = f(t)-f_\delta(t)+\varepsilon(u(t_0)-u_0), \quad t\in[t_0,T]. \tag{29}$$

Уравнение (29) запишем в виде

$$\mathrm{u}_\delta(\mathrm{t},\varepsilon) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \frac{\mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})}{\varepsilon+\mathrm{m}(\mathrm{t})}\mathrm{u}_\delta(\mathrm{s},\varepsilon)\mathrm{d}\varphi(\mathrm{s}) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \frac{1}{\varepsilon+\mathrm{m}(\mathrm{t})}[\mathrm{K}_0(\mathrm{t},\mathrm{s})-\mathrm{K}_0(\mathrm{s},\mathrm{s})]\mathrm{u}_\delta(\mathrm{s},\varepsilon)\mathrm{d}\varphi(\mathrm{s}) \tag{30}$$

$$+\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \frac{1}{\varepsilon+\mathrm{m}(\mathrm{t})}\left[\mathrm{K}_1\left(\mathrm{t},\mathrm{s},\upsilon(\mathrm{s},\varepsilon)\right) - \mathrm{K}_1\left(\mathrm{t},\mathrm{s},\mathrm{u}_\delta(\mathrm{s},\varepsilon)\right)\right]\mathrm{d}\varphi(\mathrm{s})$$

$$= \frac{\mathrm{f}(\mathrm{t})-\mathrm{f}_\delta(\mathrm{t})}{\varepsilon+\mathrm{m}(\mathrm{t})} + \frac{\varepsilon[\mathrm{u}(\mathrm{t}_0)-\mathrm{u}_0]}{\varepsilon+\mathrm{m}(\mathrm{t})}, \qquad \mathrm{t}\epsilon[\mathrm{t}_0,\mathrm{T}]$$

Используя резольвенты ядра $[-\dfrac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)}]$и обобщенную формулу Дирихле[15], уравнения (30) сводим к следующему эквивалентному уравнению

$$u_\delta(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} H_0(t,s,\varepsilon)u_\delta(s,\varepsilon)d\varphi(s) \tag{31}$$

$$+\int_{t_0}^{t} Q\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon),\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)d\varphi(\tau) + F_\delta(t,\varepsilon),$$

где $H_0(t,s,\varepsilon)$-определен в лемме 2,

$$F_\delta(t,\varepsilon) = \frac{f(t)-f_\delta(t)}{\varepsilon+m(t)} + \frac{\varepsilon[u(t_0)-u_0]}{\varepsilon+m(t)} - \frac{1}{\varepsilon+m(t)}\int_{t_0}^{t} K_0(s,s)e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[\frac{f(s)-f_\delta(s)}{\varepsilon+m(s)} + \frac{\varepsilon[u(t_0-u_0)]}{\varepsilon+m(s)}\right]\mathrm{d}\varphi(s), \tag{32}$$

$$Q\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon),\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right) = \frac{(-1)}{\varepsilon+m(t)}\left[K_1\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right)-K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right] + + \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(t)} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)} \frac{1}{\varepsilon+m(s)}\left[K_1\left(s,\tau,\vartheta(\tau,\varepsilon)\right) - K_1\left(s,\tau,u_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\varphi(s). \quad (33)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{(-1)}{\varepsilon+m(t)}\left[K_1\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right)-K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right] = \frac{(-1)}{\varepsilon+m(t)} e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[K_1\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right)-K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right] - \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{(\varepsilon+m(t))(\varepsilon+m(s))} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[K_1\left(t,\tau,\vartheta(\tau,\varepsilon)\right) - K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\varphi(s). \quad (34)$$

Учитывая условию c) и тождество (34), из (33) имеем

$$Q\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon),\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right) = \frac{(-1)}{\varepsilon+m(t)} e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[K_1\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right)-K\left(\tau,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right) + K\left(\tau,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)-K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right] - \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{(\varepsilon+m(t))(\varepsilon+m(s))} e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[K_1\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right) - K_1\left(t,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right) - K_1\left(s,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon)\right) + K_1\left(s,\tau,\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\varphi(s). \quad (35)$$

В силу(26), из (32) имеем

$$\left\|F_\delta(t,\varepsilon)\right\|_c \le 2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right). \quad (36)$$

В силу леммы 2, для $H_0(t,s,\varepsilon)$справедлива оценка (8).

Оценим $Q\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon),u_0(\tau,\varepsilon)\right)$. Учитывая условию a) и c) из (35) получим

$$\left|Q\left(t,\tau,\upsilon(\tau,\varepsilon),\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right)\right| \le \frac{l_2}{\varepsilon+m(t)} e^{-\int_\tau^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left[\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)+m(t)\right]\left|\upsilon(\tau,\varepsilon)-\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right| + \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)l_2}{(\varepsilon+m(t))(\varepsilon+m(s))}\left[\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\varphi(\tau)+m(t)\right]e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)}\left|\upsilon(\tau,\varepsilon)-\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right|d\varphi(s)] \le l_2\left|\upsilon(\tau,\varepsilon)-\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)\right|\left\{ee^{-[\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}]}\left[\int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)}d\varphi(s)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right] + \int_\tau^t \frac{K_0(s,s)}{\varepsilon+m(s)} e^{-\left[\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]}\left[\int_s^t \frac{K_0(\tau,\tau)}{\varepsilon+m(\tau)}d\varphi(\tau)+\frac{m(t)}{\varepsilon+m(t)}\right]d\varphi(s) \le l_2 e[\quad (37)$$

$$\sup_{\nu\geq 0}(e^{-\nu}\nu)+\int_0^\infty e^{-\nu}\nu d\nu]|\upsilon(\tau,\varepsilon)-\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon|]=l_2(e+1)|\upsilon(\tau,\varepsilon)-\upsilon_\delta(\tau,\varepsilon)|\Big\}.$$

В силу оценки (36), (8), (37)и учитывая (28), из (31) имеем

$$|u_\delta(t,\varepsilon)|\leq\int_{t_0}^t(l_1+l_2)(e+1)|u_\delta(s,\varepsilon)|d\varphi(s)+2\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right),\qquad t\epsilon[t_0,T]. \tag{38}$$

Далее, в силу обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана[15], из (38) получим следующую оценку

$$\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_c\leq M_4\left(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta\right), \tag{39}$$

где $M_4=2exp\{(l_1+l_2)(e+1)[\varphi(T)-\varphi(t_0)]\}$. (40)

Известно, что

$$\|v_\delta(t,\varepsilon)-v(t)\|_c\leq\|u_\delta(t,\varepsilon)\|_c+\|v(t,\varepsilon)-v(t)\|_c.$$

Отсюда, учитывая (39) имеем

$$\|\nu_\delta(\mathrm{t},\varepsilon)-\nu(\mathrm{t})\|_c\leq M_4(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta)+\|v(t,\varepsilon)-v(t)\|_c, \tag{41}$$

где число M_4 определен по формуле (40). Далее в силу теоремы 1 из (41) получим

$$\|\nu_\delta(\mathrm{t},\varepsilon)-\nu(\mathrm{t})\|_c\leq M_4(\frac{\delta}{\varepsilon}+\alpha\delta)+M_5\,\varepsilon^\gamma, \tag{42}$$

где $M_5=KMM_3$, числа K, M и M_3определены в теореме 1.

Пологая $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{2}}$ из (42) получим

$$\left\|\nu_\delta\left(\mathrm{t},\delta^{\frac{1}{2}}\right)-\mathrm{u}(\mathrm{t})\right\|_c\leq M_4\left(\delta^{\frac{1}{2}}+\alpha\delta\right)+M_5\;\delta^{\frac{\gamma}{2}}, \tag{43}$$

где числа M_4, M_5определены в (40) и (42).

Таким образом, доказана следующая теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполняются условия a), б), c) и уравнение (1) имеет решение $\upsilon(t)\in C_\psi^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$, $\psi(\mathrm{t})=\int_{t_0}^t K(s,s)d\varphi(s)+m(t)$, $t\epsilon[t_0,T]$. Тогда решение $\upsilon_\delta(t,\varepsilon)$уравнения (27) при $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{2}}\to 0$ сходится по норме $C[t_0,T]$ к $\upsilon(t)$. При этом справедлива оценка (43).

Пример. Рассмотрим уравнения (1) при

$$t_0=0,T=1,\varphi(t)=\sqrt{t},\quad K_0(t,s)=(1+t)(1-\sqrt{s}),\quad m(t)=t,K_1(t,s,\upsilon)=(t-s)\frac{\upsilon}{1+\upsilon^2},\ t\in[0,1],$$

т. е. рассмотрим следующее уравнению

$$t\upsilon(t)+\int_0^t[(1+t)(1-\sqrt{s})\upsilon(s)+\frac{(t-s)\upsilon(s)}{1+\upsilon^2(s)}]d(\sqrt{s})=f(t),\quad t\in[0,1]. \tag{44}$$

В этом случае условия a), б), c) теоремы 1 и 2 выполняются. Так как при $t>\eta$, $t,\eta\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\left|K_0(t,s)-K_0(\eta,s)\right|=(t-\eta)(1-\sqrt{s})\le m(t)\le[\int_\eta^t K_0(s,s)d\varphi(s)+m(t)].$$

Здесь $l_1=1$.

При $t>\tau$ для $(\mathrm{t,s,u_1}),(\mathrm{t,s,u_2}),(\tau,\mathrm{s,u_1}),(\tau,\mathrm{s,u_2})\epsilon\mathrm{G}\times\mathrm{R}$ справедлива оценка

$$|K_1(t,s,u_1)-K_1(\tau,s,u_1-K_1(t,s,u_2)+K_1(\tau,s,u_2)|\le(t-\tau)\left|\frac{\upsilon_1}{1+\upsilon_1{}^2}-\frac{\upsilon_2}{1+\upsilon_2{}^2}\right|\le$$

$$(t-\tau)\left|\upsilon_1-\upsilon_2\right|\frac{1+\left|\upsilon_1\right|\left|\upsilon_2\right|}{\left(1+\upsilon_1{}^2\right)(1+\upsilon_2{}^2)}\le(t-\tau)\left|\upsilon_1-\upsilon_2\right|.$$

Таким образом $l_2=1$.

Результаты и обсуждение

Для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса III рода построены регуляризирующие операторы и выбран параметр регуляризации.

Заключение

После выбора параметра регуляризации для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода были сделаны следующие выводы:

1. Найдены достаточные условия единственности и регуляризации решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода;
2. Рассмотрен выбор параметра регуляризации для решения класса нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода;
3. Доказаны теоремы единственности решений для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

От чистого сердца автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Авыт Асанову за ценные советы, предложения и замечания, сделанные им при подготовке данной статьи.

Список литературы:

1. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 234 с.
2. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. 1977. Т. 15. №0. С. 131-198.
3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-33.
4. Bedelova N., Asanov A., Orozmamatova Z., Abdullaeva Z. Regularization and Choice of the Parameter for the Third Kind Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equation Solutions // International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application. 2021. V. 10. №2. P. 81-90. https://doi.org/10.4236/ijmnta.2021.102006
5. Denisov A. M. Elements of the theory of inverse problems. (VSP). 1999.
6. Asanov A. Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. De Gruyter, 2011. https://doi.org/10.1515/9783110943238
7. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады Академии наук. 1989. Т. 309. №5. С. 1052-1055.

8. Иманалиев М. И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415. №1. С. 14-17.

9. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474. №4. С. 405-409. https://doi.org/10.7868/S086956521704-001X

10. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. №5. С. 592-596.

11. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait Journal of Science. 2017. V. 44. №1. P. 17-28.

12. Асанов Р. А. Один класс систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с вырожденными матричными ядрами // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2017. №5. С. 69-72.

13. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №3. С. 387-387. https://doi.org/10.1134/S037406411803010X

14. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Журнал Естественных наук. 2001. №1. С. 18-64.

15. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго и первого рода // Журнал Естественных наук. 2002. №2. С. 79-95.

16. Асанов А., Беделова Н. С. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Вестник КазНПУ им. Абая. 2014. №4. Вып. 48. С. 8-13.

17. Bedelova N. et al. Regularization and Choice of the Parameter for the Third Kind Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equation Solutions // International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application. 2021. V. 10. №2. P. 81-90. https://doi.org/10.4236/ijmnta.2021.102006

References:

1. Mikhlin, S. G. (1959). Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam. Moscow, Fizmatgiz, 234.

2. Tsalyuk, Z. B. (1977). Integral'nye uravneniya Vol'terra. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Matematicheskii analiz, 15*(0), 131-198.

3. Lavrentev, M. M. (1959). Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda. *Doklady AN SSSR, 127*(1), 31-33.

4. Bedelova, N., Asanov, A., Orozmamatova, Z., & Abdullaeva, Z. (2021). Regularization and Choice of the Parameter for the Third Kind Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equation Solutions. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application, 10*, 81-90. https://doi.org/10.4236/ijmnta.2021.102006

5. Denisov, A. M. (1999). Elements of the theory of inverse problems. (VSP).

6. Asanov, A. (2011). Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind. De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110943238

7. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (1989). O resheniyakh sistem nelineinykh integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo roda. *Doklady Akademii nauk, 309*(5), 1052-1055.

8. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2007). Regularization and Uniqueness of Solutions to Systems of Nonlinear Volterra Integral Equations of the Third Kind. *Doklady Mathematics, 76*(1), 490-493.

9. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2017). Solutions to Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third Kind with Multipoint Singularities. *Doklady Mathematics, 95*(3), 235-239. https://doi.org/10.7868/S086956521704-001X

10. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2011). A Class of Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third Kind. *Doklady Mathematics, 437*(5), 592-596.

11. Asanov, A., Matanova, K., & Asanov, R. (2017). A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. *Kuwait Journal of Science*, *44*(1). 17-28.

12. Asanov, R. A. (2017). A Class of Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third Kind with the Degenerate Matrix Kernels. *Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана*, (5), 69-72.

13. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2018). On a class of systems of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind with multipoint singularities. *Differential Equations*, 54(3), 387-397. https://doi.org/10.1134/S037406411803010X

14. Asanov, A. (2001) Derivative function with respect to increasing function. *Journal of Natural Sciences,* (1), 18-64.

15. Asanov, A. (2002) Volterra-Stieltjes integral equations of the second and first kind. *Journal of Natural Sciences,* (2), 79-95.

16. Asanov, A., and Bedelova, N. S. (2014) One class of linear integral Volterra-Stieltjes equations of the third kind. *Bulletin of KazNPU named after Abay,* Almaty, 4, 48, 8-13.

17. Bedelova, N., Asanov, A., Orozmamatova, Z., & Abdullaeva, Z. (2021). Regularization and Choice of the Parameter for the Third Kind Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equation Solutions. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, *10*(2), 81-90. https://doi.org/10.4236/ijmnta.2021.102006

Работа поступила в редакцию 29.01.2022 г.

Принята к публикации 03.02.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Беделова Н. С., Асанов А., Орозмаматова Ж. Регуляризация и выбор параметра решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №3. С. 11-24. https://doi.org/10.33619/2414-2948/76/01

Cite as (APA):

Bedelova, N., Asanov, A., & Orozmamatova, Zh. (2022). Regularization and Parameter Choice for the Third Kind Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Equation Solutions. *Bulletin of Science and Practice, 8*(3), 11-24. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/76/01