ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.968 https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/01
MSC 2020: 45B05, 45A05, 45G10

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ ТРЕТЬЕГО РОДА НА СЕГМЕНТЕ

*©**Беделова Н. С.,** ORCID: 0000-0002-4248-4563, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kireshe78@gmail.com*
*©**Асанов А.,** ORCID: 0000-0002-0608-0860, д-р физ.-мат. наук, Киргизско-Турецкий университет «Манас», г. Бишкек, Кыргызстан, avyt.asanov@manas.edu.kg*

ON THE UNIQUENESS OF A SOLUTION FOR LINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS OF THE THIRD KIND ON A SEGMENT

*©**Bedelova N.,** ORCID: 0000-0002-4248-4563, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kireshe78@gmail.com*
*©**Asanov A.,** ORCID: 0000-0002-0608-0860, Dr. habil., Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan, avyt.asanov@manas.edu.kg*

Аннотация. Исследован вопрос о единственности решения для нового класса линейных интегральных уравнений Вольтерры третьего рода на сегменте. На основе метода интегральных преобразований и метода неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности решения для данного класса интегральных уравнений третьего рода.

Abstract. The issue of the uniqueness of the solution for a new class of linear integral Volterra equations of the third kind on a segment is studied. On the basis of the method of integral transformations and the method of non-negative quadratic forms, uniqueness theorems for solutions are proved for a given class of integral equations of the third kind.

Ключевые слова: единственность решения, линейные интегральные уравнения Вольтерры, уравнения третьего рода.

Keywords: uniqueness, linear integral Volterra equations, equations of the third kind.

Теоретическая часть и приложения интегральных уравнений изучались и исследовались во многих различных работах. В частности, в работе [1] рассмотрен обзор результатов исследований интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В работе [2] изучаются интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов с гладкими ядрами, где приводится доказательство существование многопараметрическое семейство решений. В работе [3] исследованы линейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода, для которых построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву. В работе [4] приводится теория и используются численные методы решения неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода с дифференцируемыми и отличными от нуля ядрами на диагонали. В работах [4–7] приведены применения неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода в разных прикладных задачах. В работе [8] используется метод регуляризации М. М. Лаврентьева для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими и отличными от нуля ядрами на диагонали дифференцируемыми решениями, для которых построено приближенное решение. В работах [9, 10] получены достаточные условия единственности решений и исследованы вопросы регуляризации решений систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов. В работе [11] доказывается теорема единственности решений и находится регуляризирующий оператор для решения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В работах [12, 13] использован новый подход для исследования вопросов существования и единственности решений скалярных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями и их систем. В работе [14] приведены результаты по интегральным уравнениям Волтерра первого рода. В работе [15] доказывается теорема единственности решений для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода.

В данной работе используя метод интегральных преобразований, метод неотрицательных квадратичных форм и обобщением метода изложенных в работе [15] установлены достаточные условия единственности решения для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода на сегменте. *Методология:* линейные интегральные уравнения Вольтерра третьего рода на сегменте

Будем рассматривать уравнение

$$m(t)u(t)+\int_a^t K(t,s)u(s)ds=f(t), t\in[a,b], \tag{1}$$

где $m(t), \varphi(t), K(t,s)$ и $f(t)$ — известные функции, $m(t)\in C[a,b], 0\le m(t)$ при всех $t\in[a,b]$ и $m(t)$ равна нулю хотя бы в одной точке сегмента $[a,b], u(t)$ — неизвестная функция. Предположим, что

$$K(t,s)=\sum_{i=1}^n P_i(t)H_i(t,s)P_i(s), \tag{2}$$

где $P_i(t)$ и $H_i(t,s)$ — известные непрерывные функции соответственно на $[a,b]$ и $G=\{(t,s): a\le s\le t\le b\}, i=1,2,\dots,n$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) $P_i(t)\in C[a,b], P_i(t)\neq 0$ при почти всех $t\in[a,b], \frac{\partial \mathrm{H_i(t,s)}}{\partial \mathrm{t}}, \frac{\partial^2 \mathrm{H_i(t,s)}}{\partial \mathrm{t}\,\partial s}$ — непрерывные функции в области $G=\{(t,s): a\le s\le t\le b\}, \big(H_i(t,a)\big)', \big(H_i(b,t)\big)'$ — непрерывные функции в $[a,b], i=1,2,\dots,n$;

б) $m(t)\ge 0, H_i(t,a)\ge 0, \big(H_i(t,a)\big)'\le 0, \forall t\in[a,b], \frac{\partial H_i(t,s)}{\partial s}\ge 0,$

$$\frac{\partial^2 H_i(t,s)}{\partial t\partial s}\le 0, \forall (t,s)\in G, i=1,2,\dots,n;$$

в) выполняется хотя бы один из следующих условий:

1) $m(t)>0$ при почти всех $t\in[a,b]$;

2) существует $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ такое, что $H_{i_0}(t,a)>0$ при почти всех $t\epsilon[a,b]$;

3) существует $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ такое, что $(H_{i_0}(\mathrm{t,a}))'<0$ при почти всех $t\in[a,b]$.

г) выполняется хотя бы один из следующих условий:

1) существует $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ такое, что $(H_{i_0}(b,\mathrm{t}))'>0$ при почти всех$t\in[a,b]$;

2) существует $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ такое, что$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H_{i_0}(t,s)<0$ при почти всех $(t,s)\epsilon G$.

Если учесть (2), то уравнение (1) принимает вид

$$m(t)u(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}P_i(t)H_i(t,s)P_i(s)u(s)ds=f(t),t\in[a,b]. \tag{3}$$

Умножив на $u(t)$ уравнение (3) и проинтегрировав по области $[a,t], t\in[a,b]$ будем иметь

$$\int_{a}^{t}m(s)u^2(s)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\int_{a}^{s}P_i(s)H_i(s,\tau)P_i(\tau)u(\tau)u(s)d\tau ds=\int_{a}^{t}f(s)u(s)ds.$$

Отсюда, используя формулу Дирихле, имеем

$$\int_{a}^{t}m(s)u^2(s)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}H_i(s,\tau)P_i(s)u(s)ds\right]P_i(\tau)u(\tau)d\tau= \tag{4}$$
$$=\int_{a}^{t}f(s)u(s)ds.$$

Введем обозначения

$$Z_i(t,s)=\int_{s}^{t}P_i(\tau)u(\tau)d\tau, i=1,2,\dots,n. \tag{5}$$

Тогда

$$P_i(s)u(s)ds=-d_sZ_i(t,s), i=1,2,\dots,n, \tag{6}$$

$$P_i(t)u(t)dt=d_tZ_i(t,s), i=1,2,\dots,n, \tag{7}$$

$$Z_i(t,s)P_i(t)u(t)dt=\frac{1}{2}d_tZ_i^2(t,s), i=1,2,\dots,n, \tag{8}$$

$$Z_i(t,s)P_i(s)u(s)d\varphi(s)=-\frac{1}{2}d_sZ_i^2(t,s), i=1,2,\dots,n. \tag{9}$$

Применяя (5), (6), (7), (8), (9), метод интегрирования по частям и формулу Дирихле, для двойного интеграла из (4) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\int_{\tau}^{t}H_i(s,\tau)P_i(s)u(s)dsP_i(\tau)u(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}H_i(s,\tau)d_s\,Z_i(s,\tau)\right]*$$
$$*\,P_i(\tau)u(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\left[H_i(s,\tau)Z_i(s,\tau)\Big|_{s=\tau}^{s=t}-\int_{\tau}^{t}\frac{\partial}{\partial s}H_i(s,\tau)Z_i(s,\tau)ds\right]u(\tau)*$$
$$*\,P_i(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}H_i(t,\tau)Z_i(t,\tau)P_i(\tau)u(\tau)d\tau-\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\int_{a}^{s}\frac{\partial}{\partial s}H_i(s,\tau)Z_i(s,\tau)P_i(\tau)u(\tau)d\tau ds=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}H_i(t,\tau)d_\tau Z_i^2(t,\tau)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{t}\int_{a}^{s}\frac{\partial}{\partial s}H_i(s,\tau)d_\tau Z_i^2(s,\tau)ds=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[H_i(t,a)Z_i^2(t,a)+\int_{a}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}H_i(t,r)Z_i^2(t,\tau)d\tau-\int_{a}^{t}\frac{d}{ds}H_i(s,a)Z_i^2(s,a)ds-\right.$$

Т. 8. №9. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/82

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^t\int\limits_a^s \frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau}H_i(s,\tau)Z_i^2(s,\tau)d\tau ds\Bigg].$$

Отсюда в силу (5) имеем

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_a^t\int\limits_\tau^t H_i(s,\tau)P_i(s)u(s)dsP_i(\tau)u(\tau)d\tau = \tag{10}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\Bigg\{H_i(t,a)\left[\int\limits_a^t P_i(s)u(s)ds\right]^2+\int\limits_a^t\frac{\partial}{\partial\tau}H_i(t,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P_i(s)u(s)ds\right]^2 d\tau -$$

$$-\int\limits_a^t\left(H_i(s,a)\right)'\left[\int\limits_a^s P_i(s)u(s)ds\right]^2 ds$$

$$-\int\limits_a^t\int\limits_a^s\frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau}H_i(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P_i(s)u(s)ds\right]^2 d\tau ds\Bigg\}.$$

Учитывая (10), из (4) имеем

$$\int\limits_a^t m(s)u^2(s)ds+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\Bigg\{H_i(t,a)\left[\int\limits_a^t P_i(s)u(s)ds\right]^2+\int\limits_a^t\frac{\partial}{\partial\tau}H_i\,(t,\tau)\,* \tag{11}$$

$$\left[\int\limits_\tau^t P_i(s)u(s)ds\right]^2 d\tau-\int\limits_a^t(H_i(s,a))'\left[\int\limits_a^s P_i(s)u(s)ds\right]^2 ds -$$

$$-\int\limits_a^t\int\limits_a^s\frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau}H_i(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P_i(s)u(s)ds\right]^2 d\tau ds = = \int\limits_a^t f(s)u(s)ds.$$

Таким образом, если $f(t)=0$ при всех $t\in[a,b]$, то в силу условия а), б) и в) из (11) получим:

$$\int\limits_a^t P_i(s)u(s)ds\equiv 0$$

или

$$\int\limits_s^t P_i\,(\xi)u(\xi)d\xi\equiv 0, t, s\epsilon[a,b], s<t.$$

Отсюда $u(t)=0$ при всех $t\epsilon[a,b]$. Доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. Если условия а), б и в) выполнены, то уравнение (1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения. Подставляя $t=b$ из (11), имеем

$$\int\limits_a^b m(s)u^2(s)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\Bigg\{H_i(b,a)\left[\int\limits_a^b P_i(s)u(s)ds\right]^2+\int\limits_a^b(H_i(b,\tau))'\,* \tag{12}$$

$$\left[\int_{\tau}^{b} P_i(s)u(s)ds\right]^2 d\tau - \int_{a}^{b} (H_i(s,a))' \left[\int_{a}^{s} P_i(s)u(s)ds\right]^2 ds - \int_{a}^{b}\int_{a}^{s} \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial\tau} H_i(s,\tau) *$$

$$* \left[\int_{\tau}^{s} P_i(s)u(s)\,ds\right]^2 d\tau ds \Bigg\} = \int_{a}^{b} f(s)u(s)ds.$$

Из (12) вытекает справедливость следующей теоремы 2.

Теорема 2. Если условия а), б) и г) выполнены, то уравнение (1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.

Результаты: примеры

Приведем примеры, которые будут удовлетворять условиям выше сформулированных теорем о единственности решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода на конечном отрезке.

Пример1. Рассмотрим уравнение (1) при $n = 2, a = 0, b = 1, P_1(t) = \sqrt[4]{t}, m(t) = t, H_1(t,s) = \frac{s}{1+t}$, $P_2(t) = \sqrt{t}$, $H_2(t,s) = \frac{2s}{3+t}$.

В этом случае все условия теоремы 1 выполняются. Так как

$$H_1(t,0) = 0, \left(H_1(t,0)\right)' = 0, \frac{\partial}{\partial s}H_1(t,s) = \frac{1}{1+t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H_1(t,s) = -(1+t)^{-2}, (t,s) \in G,$$

$$H_2(t,0) = 0, (H_2(t,0))' = 0, \frac{\partial}{\partial s}H_2(t,s) = \frac{2}{3+t}, \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H_2(t,s) =$$
$$= -2(3+t)^{-2}, (t,s) \in G.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение (1) при $n = 2, a = 0, b = 1, P_1(t) = \sin 2\sqrt{t}, m(t) = \sin t, H_1(t,s) = se^{-t}$, $P_2(t) = \ln(1+\sqrt{t}), H_2(t,s) = 3se^{-6t}$.

В этом случае все условия теоремы 2 выполняются. Так как

$$H_1(t,0) = 0, \left(H_1(t,0)\right)' = 0, \frac{\partial}{\partial s}H_1(t,s) = e^{-t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H_1(t,s) = -e^{-t}, (t,s) \in G,$$

$$H_2(t,0) = 0, (H_2(t,0))' = 0, \frac{\partial}{\partial s}H_2(t,s) = 3e^{-6t}, \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H_2(t,s) =$$

$$= -18e^{-6t}, (t,s) \in G, H_1(1,t) = te^{-1}, \left(H_1(1,t)\right)' = e^{-1}.$$

Предложенные методы можно использовать для исследования вопросов единственности решения для различных классов линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, а также при решении конкретных прикладных задач, приводящихся к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д-ру физ.-мат. наук, профессору А. Асанову за постановку задачи, руководство и консультации при выполнении работы

Список литературы:

1. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Матанализ. 1977. №15. С. 131-198.

2. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов // Журнал вычислительной математики и матфизики. 1979. Т. 19. №4. С. 970-989.

3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-33.

4. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода // Теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

5. Апарцин А. С., Караулова И. В., Маркова Е. В., Труфанов В. В. Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. 2005. №10. С. 69-75.

6. Апарцин А. С., Сидлер И. В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра первого рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды института математики и механики Уро РАН. 2018. Т. 24. №2. С. 24-33. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

7. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.

8. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. №4. С. 1053-1056.

9. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309. №5. С. 1052-1055.

10. Иманалиев М. И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН. 2007. Т. 415. №1. С. 14-17.

11. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады РАН. 2010. Т. 430. №6. С. 1-4.

12. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №3. С. 387-397.

13. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait Journal of Science. 2017. V. 44. №1. P. 17-28.

14. Lamm P. K. A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations // Surveys on solution methods for inverse problems. Springer, Vienna, 2000. P. 53-82. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. Асанов А., Матанова К. Б., Абсамат кызы Э. Единственность решения для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24. №1. С. 11-20. https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

References:

1. Tsalyuk, Z. B. (1977). Integral'nye uravneniya Vol'terra. *Itogi nauki i tekhniki, Matanaliz,* (15)*,* 131-198. (in Russian).

2. Magnitskii, N. A. (1979). Lineinye integral'nye uravneniya Vol'terra pervogo i tret'ego rodov. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matfiziki, 19*(4), 970-989. (in Russian).

3. Lavrent'ev, M. M. (1959). Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda. *Doklady AN SSSR, 127*(1), 31-33. (in Russian).

4. Apartsin, A. S. (1999). Neklassicheskie uravneniya Vol'terra pervogo roda // Teoriya i chislennye metody. Novosibirsk. (in Russian).

5. Apartsin, A. S., Karaulova, I. V., Markova, E. V., & Trufanov, V. V. (2005). Primeneniya integral'nykh uravnenii Vol'terra dlya modelirovaniya strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya elektroenergetiki. *Elektrichestvo,* (10), 69-75. (in Russian).

6. Apartsyn, A. S., & Sidler, I. V. (2018). Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 24*(2), 24-33. (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

7. Glushkov, V. M., Ivanov, V. V., & Yanenko, V. M. (1983). Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem. Moscow. (in Russian).

8. Denisov, A. M. (1975). O priblizhennom reshenii uravneniya Vol'terra I roda. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 15*(4), 1053-1056. (in Russian).

9. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (1989). O resheniyakh sistem nelineinykh integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo roda. *Doklady AN SSSR, 309*(5), 1052-1055. (in Russian).

10. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2007). Regulyarizatsiya i edinstvennost' reshenii sistem nelineinykh integral'nykh uravnenii Vol'terra tret'ego roda. *Doklady RAN, 415*(1), 14-17. (in Russian).

11. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2010). O resheniyakh sistem lineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma tret'ego roda. *Doklady RAN, 430*(6), 1-4. (in Russian).

12. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2018). Ob odnom klasse sistem lineinykh i nelineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma tret'ego roda s mnogotochechnymi osobennostyami. *Differentsial'nye uravneniya, 54*(3), 387-397. (in Russian).

13. Asanov, A., Matanova, K., & Asanov, R. (2017). A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. *Kuwait Journal of Science*, *44*(1), 17-28.

14. Lamm, P. K. (2000). A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations. In *Surveys on solution methods for inverse problems* (pp. 53-82). Springer, Vienna. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. Asanov, A., Matanova, K., & Absamat, kyzy E. (2022). Uniqueness of the solution of one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva [Middle Volga Mathematical Society Journal], 24*(1), 11-20. (in Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

Работа поступила в редакцию 06.08.2022 г.

Принята к публикации 12.08.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Беделова Н. С., Асанов А. О единственности решения для линейных интегральных уравнений Вольтерры третьего рода на сегменте // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №9. С. 12-18. https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/01

Cite as (APA):

Bedelova, N., & Asanov, A. (2022). On the Uniqueness of a Solution for Linear Integral Volterra Equations of the Third Kind on a Segment. *Bulletin of Science and Practice, 8*(9), 12-18. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/82/01