УДК 517.9 https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/03

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

©Алыбаев А. М., *ORCID: 0000-0002-5545-2915, SPIN-код: 8661-7988, канд. физ.-мат. наук, Киргизский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан, anarbek.alybayev @mail.ru*

REGULARIZATION OF AN ILL-POSED VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

©Alybayev A., *ORCID: 0000-0002-5545-2915, SPIN-code: 8661-7988, Ph.D., Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, anarbek.alybayev@mail.ru*

Аннотация. В статье исследуется нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с особым решением. При этом на основе разработанного метода сингулярных возмущений доказаны вопросы регуляризируемости и единственности решения исходного уравнения во введенном пространстве, где учитывается особая функция специального типа с малым параметром. Отметим, что исследуемое уравнение вырождается во многих некорректных (условно-корректных) обратных задачах математической физики, например, в задачах: теплопроводности, фильтрации, интегральной геометрии, влагопереноса в почвогрунтах, наследственной среды [2–4, 10] и др., в чем и заключается актуальность данной статьи.

Abstract. In the paper we study a nonlinear the first kind Volterra integral equation with a special solution. At the same time, on the base of the developed method of singular perturbations, the questions of regularizability and uniqueness of the solution of the original equation in the introduced space, where a special function of a special type with a small parameter is taken into account, are proved. We note that the equation under study degenerates in many incorrect (conditionally correct) inverse problems of mathematical physics, for example, in the problems of heat conduction, filtration, integral geometry, moisture transfer in soils, hereditary environment [2–4, 10], etc., in which is the relevance of this paper.

Ключевые слова: метод регуляризации, малый параметр, некорректная задача, особое решение, интегральные уравнения Вольтерра первого рода.

Keywords: regularization method, small parameter, ill-posed problem, special solution, first kind Volterra integral equations.

В теории ИУВ-1 и ИУВ-3 рассмотрены различные варианты МР, связанные с ядрами данных уравнений, которые встречаются в работах [1, 5-9, 11]. Особое место занимает случай МР в области ИУВ-1 или ИУВ-3, которое позволяет построить особое решение в определенном пространстве, где учитывается функция, имеющее сингулярности относительно малого параметра [5, 7]. В указанных условиях регуляризируемость исходных нелинейных ИУВ-1 или ИУВ-3 считаются в обобщенном смысле в тех пространствах, которые введены.

В связи с этим, в настоящей статье изучается некорректное ИУВ-1 вида:

(1)

$$H\theta \equiv \int_0^x K(x,\tau)\theta^2(\tau)d\tau = F(x),$$

где

$$\begin{cases} C(D_0) \ni K(x,\tau): |K(.)| \le C_{01}, (D_0 = \{(x,\tau): 0 \le \tau \le x \le X\}, \\ K(.) \ge 0; K(0,0) \ne 0, \\ C[0,X] \ni F(x): F(0) \ne 0; |F(0)| \le C_{02}; F(x) \ge \alpha > 0, \forall x \in [0,X], \end{cases} \quad (2)$$

F,K — известные функции, причем $\theta -$ неизвестная функция из [11]: $Z^2(0,X)$, здесь $Z^2(0,X)$ — это пространство, элементами которого являются все суммируемые с квадратом функции из $L^2[0,X]$, а также обобщенные функции $z(x)$, сосредоточенные в начале координат отрезка $[0,X]$ (с условием, если неотрицательная пробная функция $\phi(0)=1,$ то $< z^2, \phi >= 1).$ При этом ставится задача, доказать регуляризируемости (1) в вышеуказанном пространстве, так как при условии (2) ИУВ-1 некорректно поставленное, т.е. не имеет решение в $C[0,X].$

1. Регуляризирующие алгоритмы в ИУВ-1

Чтобы доказать регуляризируемость (1) при условии (2) в обобщенном смысле, сперва проводя следующие математические преобразования, т.е. допуская:

$$\begin{cases} h(x) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x)]F(x) \ge m > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(x) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(x); 0 \le \lambda(x) \in L^1(0,X), \\ h_0(x) \le C_{03}h(x), (C_{03} = \alpha^{-1}; 0 < \max C_{0j} = \tilde{C}_1, j = \overline{1,4}), \\ C_0 = \max(1, C_{01}\tilde{C}_1^k), (k = \overline{1,5}), \\ \phi_0(x) = \int_0^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau = \int_0^x h(\tau)d\tau, \\ F_0(x) \equiv F(x) - F(0); |F_0(x)| \le C_{04}, \forall x \in [0,X], \\ \text{например } \lambda(x) \equiv \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}: \\ |F_0(x) - F_0(\tau)| \le L_{F_0}(x-\tau) \le L_{F_0}\frac{1}{\gamma\alpha}\int_\tau^x [\gamma + \frac{1}{\alpha}\lambda(\tau)]F(\tau)d\tau = \\ = L_{F_0}M_0(\phi_0(x) - \phi_0(\tau)), (\tau \le x; \gamma > 1; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha}), \\ x \in [0,X]: \quad x = (\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{2}}(\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{2}} \le M_1(\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}, \\ x \le M_1(\sqrt[4]{X})^{\frac{3}{2}}(\phi_0(x))^2 \le M_2(\phi_0(x))^2, \\ M_1 = X^{\frac{1}{8}}; M_2 = X^{\frac{1}{8}}(\sqrt[4]{X})^{\frac{3}{2}} = X^{\frac{1}{2}}, \\ \chi \equiv \rho^k \exp(-\rho); \sup_{\rho \ge 0}\chi(\rho) = k^k \exp(-k), (k = 1, 2, \frac{7}{2}), \\ \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho \to \infty: \chi \to 0, \end{cases} \quad (3)$$

ИУВ-1 (1) эквивалентно преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^x h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (Q\theta)(x) + F(x), \\ Q\theta \equiv \int\limits_0^x h_0(\tau)\theta(\tau)(H\theta)(\tau)d\tau + (H\theta)(x). \end{cases} \tag{4}$$

Далее, рассмотрим уравнение с малым параметром ε, вида

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(x) + (\Phi\theta_\varepsilon)(x) = F_\varepsilon(x), \\ (\Phi\theta_\varepsilon)(x) \equiv \int\limits_0^x h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (Q\theta_\varepsilon)(x), \end{cases} \tag{5}$$

с условием

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}F(0), \\ C[0,X] \ni F_\varepsilon(x) : \|F_\varepsilon(x) - F(x)\|_C \le \Delta_0(\varepsilon), \\ F_\varepsilon(0) = F(0). \end{cases} \tag{6}$$

Решение этого уравнения ищем по правилу:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(x) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

причем, относительно неизвестных функций имеют место:

$$\Pi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\Pi_\varepsilon(\tau)d\tau + F(0) \tag{8}$$

$$\int\limits_0^x h(\tau)\upsilon(\tau)d\tau = (Q\upsilon)(x) + F_0(x), \tag{9}$$

(см.(3))

$$\varepsilon\xi_\varepsilon + \int\limits_0^x h(\tau)\xi_\varepsilon(\tau)d\tau = (Q[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(x) - (Q\upsilon)(x) + F_\varepsilon(x) - F(x) - \varepsilon\upsilon(x), \tag{10}$$

где: а) $\Pi_\varepsilon(x)$ - является решением (8), которое доопределяет особую функцию $\Omega_\varepsilon(x)$ с условием

$$|\Omega_\varepsilon(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} 0, x \ne 0, \\ \infty, x = 0; \end{cases} \tag{11}$$

б) $\upsilon(x)$ — решение видоизмененного вырожденного уравнения (9), где свободный член в начале отрезка $[0,X]$ обращается в нуль. При этом функция $\upsilon(x) \in C[0,X]$ и доказывается, что ИУВ (9) регуляризируема в $C[0,X]$.

в) Функция $\xi_\varepsilon(x)$ определяется единственным образом из (10), причем сходится к нулю в смысле $C[0,X]$ когда малый параметр: $\varepsilon \to 0$.

1) В самом деле, во-первых, из (8) следует:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(x) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Pi_\varepsilon(x)| \le C_{02}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)) \le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)). \end{cases} \qquad (12)$$

Значит, получим (11).

2) Во вторых, так как функция $\upsilon(x)$ является решением уравнения (9), то вводя уравнение с малым параметром вида:

$$\delta\upsilon_\delta(x) + \int_0^x h(\tau)\upsilon_\delta(\tau)d\tau = (Q\upsilon_\delta)(x) + F_0(x), \qquad (13)$$

можем доказать следующую лемму:

Лемма 1. При условиях (2),(3) и (7) уравнение (30) имеет решение ИУВ (13) равномерно сходится к решению (9) при $\delta \to 0$. Доказательство. В условиях леммы 1 уравнение (13) преобразуем к виду

$$\upsilon_\delta(x) = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q\upsilon_\delta)(\tau)-(Q\upsilon_\delta)(x)+ \qquad (14)$$

$$+F_0(\tau)-F_0(x)\}d\tau + \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\{(Q\upsilon_\delta)(x)+F_0(x)\}$$

и проводим оценки вида

$$\begin{cases} \mathrm{a}_1)\ \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q\upsilon_\delta)(x)-(Q\upsilon_\delta)(\tau)\}d\tau \right| \le \\ \le \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int_\tau^x h_0(\tilde{\tau})|\upsilon_\delta(\tilde{\tau})|\int_0^{\tilde{\tau}} |K(\tilde{\tau},\bar{\tau})| \times \right. \\ \times|\upsilon_\delta^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau}d\tilde{\tau} + \int_0^\tau |K(x,\bar{\tau})-K(\tau,\bar{\tau})| \times |\upsilon_\delta^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau} + \\ +\int_\tau^x |K(x,\bar{\tau})| \times |\upsilon_\delta^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau}\}d\tau \le 2[C_{01}X\frac{1}{\alpha}r_1^2 + \frac{1}{\alpha\gamma}r_1(L_K X + C_{01})] \times \\ \times\int_0^\infty e^{-z}zdz\|\upsilon_\delta\|_C = N_0\|\upsilon_\delta\|_C; \\ \left| \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q\upsilon_\delta)(x) \right| \le \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))| \{\int_0^x h_0(\tau)|\upsilon_\delta(\tau)| \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} \times[\int_0^\tau |K(\tau,\bar{\tau})| \times |\upsilon_\delta^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau}]d\tau + \int_0^x |K(x,\tau)| \times |\upsilon_\delta^2(\tau)|d\tau\} \le \\ \le [\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\delta}\phi_0(x)\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)))XC_{01}r_1^2 + C_{01}r_1\, M_1\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))] \times \\ \times\|\upsilon_\delta\|_C \le [\frac{1}{\alpha}e^{-1}XC_0r_1^2 + C_0r_1\, M_1\delta 2^2 e^{-2}]\|\upsilon_\delta\|_C \le N_1\|\upsilon_\delta\|_C, \\ 0<\delta<1; \rho \equiv \frac{1}{\delta}\phi_0(x); \chi(\rho) = \rho^k\exp(-\rho), (k=1,2), \int_0^\infty e^{-s}sds = 1, \\ S_{r_1}(0) = \{\upsilon_\delta(x) \in C[0,X] : |\upsilon_\delta(x)| \le r_1, \forall x \in [0,X]\}, \end{cases}$$

а также:

$$\text{a}_2)\ \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_0(x)-F_0(\tau)\}d\tau + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))F_0(x)\ \right| \le \left| \frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times \right.$$

$$\times L_{F_0}(x-\tau)d\tau + L_{F_0}\frac{x}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)) \le \frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int_0^x \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\times$$

$$\times\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))) + L_{F_0}M_2\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x)) \le$$

$$\le L_{F_0}[\frac{1}{\alpha\gamma}\int_0^\infty e^{-z}zdz + 2^2e^{-2}M_2\delta] \le L_0.$$

Тогда имеет место

$$\begin{cases} \|\upsilon_\delta(x)\|_C \le (1-q_0)^{-1}L_0 = r_1, \\ q_0 = N_0 + N_1 < 1. \end{cases} \tag{15}$$

С другой стороны, с помощью подстановки: $\upsilon_\delta(x)=\upsilon(x)+\mu_\delta(x)$,
для любого:

$$\mu_\delta(x)\in S_{r_2}(0)=\{\mu_\delta(x)\in C[0,X]:|\mu_\delta(x)|\le r_2,\forall(x)\in[0,X]\}$$, получим

$$\delta\mu_\delta(x)+\int_0^x h(\tau)\mu_\delta(\tau)d\tau = (Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-(Q\upsilon\ )(x)-\delta\upsilon(x),$$

или, на основе резольвенты имеем:

$$\mu_\delta(x) = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(\tau)-(Q\upsilon\ )(\tau)- \tag{16}$$

$$-(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)+(Q\upsilon\ )(x)\}d\tau + \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\{(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-$$

$$-(Q\upsilon\ )(x)\} + \Delta(\delta,\upsilon),$$

где

$$\begin{cases} \Delta(\delta,\upsilon) = -\frac{1}{\delta}\int_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau)+\upsilon(x)]d\tau - \upsilon(x)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)), \\ \|\Delta(\delta,\upsilon)\|_c \le L_\upsilon\{\int_0^x (\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))(x-\tau)d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))) + x\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\} \le \\ \le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^x (\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\ \delta d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))) + \\ +\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(x)\} \le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\delta\{\int_0^\infty e^{-z}zdz + e^{-1}\} \le \beta\delta, \\ L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int_0^\infty e^{-z}zdz + e^{-1}\} \le 2L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha} = \beta, (0 < L_\upsilon = const), \\ |\upsilon(x)-\upsilon(\bar{x})| \le L_\upsilon|x-\bar{x}|. \end{cases} \tag{17}$$

Следовательно, учитывая оценки вида:

Т. 8. №7. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/80

$$\begin{cases} \text{a}_3) \mid \dfrac{1}{\delta^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\dfrac{1}{\delta}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})[\upsilon(\tilde{\tau})+\mu_\delta(\tilde{\tau})]\times \\ \times\int\limits_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})[2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+\mu_\delta^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_\tau^x h_0(\tilde{\tau})\mu_\delta(\tilde{\tau})\times \\ \times\int\limits_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^\tau [K(x,\bar{\tau})-K(\tau,\bar{\tau})][2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+ \\ +\mu_\delta^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}+\int\limits_\tau^x K(x,\bar{\tau})[2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+\mu_\delta^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}\}d\tau \mid\le \\ \le 2\dfrac{1}{\alpha}\{XC_{01}(\tilde{r}_1+r_2)(2\tilde{r}_1+r_2)+\tilde{r}_1^2XC_{01}+\dfrac{1}{\gamma}(2\tilde{r}_1+r_2)(L_KX+C_{01})\}\times \\ \times\|\mu_\delta(x)\|_C=\tilde{N}_0\|\mu_\delta(x)\|_C; \\ \mid \dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))(Q[\upsilon+\mu_\delta])(x)-(Q\upsilon)(x) \mid\le\dfrac{1}{\delta}\exp(-\dfrac{1}{\delta}\phi_0(x))\times \\ \times[\int\limits_0^x |K(x,\tau)|\times|2\upsilon(\tau)\mu_\delta(\tau)+\mu_\delta^2(\tau)|d\tau+\int\limits_0^x h_0(\tau)|\upsilon(\tau)+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\mu_\delta(\tau)|\int\limits_0^\tau |K(\tau,\bar{\tau})|\times|2\upsilon(\bar{\tau})\mu_\delta(\bar{\tau})+\mu_\delta^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau}d\tau+\int\limits_0^x h_0(\tau)\times \\ \times|\mu_\delta(\tau)|\int\limits_0^\tau |K(\tau,\bar{\tau})|\times|\upsilon^2(\bar{\tau})|d\bar{\tau}d\tau]\le[C_{01}M_2(2\tilde{r}_1+r_2)2^2e^{-2}\delta+ \\ +C_{01}X\dfrac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+r_2)(2\tilde{r}_1+r_2)e^{-1}+C_{01}X\dfrac{1}{\alpha}\tilde{r}_1^2e^{-1}]\|\mu_\delta(x)\|_C\le\tilde{N}_1\|\mu_\delta(x)\|_C, \\ 0<\delta<1; |\upsilon|\le\tilde{r}_1, \forall x\in[0,X], \end{cases}$$

из (16), имеем

$$\begin{cases} \|\mu_\delta(x)\|_c\le(1-q_1)^{-1}\beta\delta, \\ q_1=\max(q_0<1,\tilde{q}_0<1),(\tilde{q}_0=\tilde{N}_0+\tilde{N}_1<1). \end{cases} \tag{18}$$

А это означает, что

$$\upsilon_\delta(x)\underset{\delta\to0}{\to}\upsilon(x), \forall x\in[0,X], \tag{19}$$

т. е., сходится в смысле $C[0,X]$. Что и требовалось доказать.

3) Чтобы определить функцию $\xi_\varepsilon(x)$, сперва (10) преобразуем к виду

$$\xi_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(\tau)- \\ -(Q\upsilon)(\tau)-(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x)+(Q\upsilon)(x)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\times \\ \times\{(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x)-(Q\upsilon)(x)\}+\Delta(\varepsilon,\upsilon)+\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F), \tag{20}$$

где

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon,\upsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))[-\upsilon(\tau)+\upsilon(x)]d\tau-\upsilon(x)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)),\\ \Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{F_\varepsilon(\tau)-F(\tau)\}d\tau+\frac{1}{\varepsilon}[F_\varepsilon(x)-F(x)],\\ \|\Delta(\varepsilon,\upsilon)\|_c\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\{\int\limits_0^x(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))[\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))]\,\varepsilon d(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau)))+\\ +\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)\}\le L_\upsilon\frac{1}{\gamma\alpha}\varepsilon\{\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz+e^{-1}\}\le\beta\varepsilon.\end{cases}\tag{21}$$

Далее, для оценки (20) учитываем:

$$\begin{cases}\text{a}_4)\ |\Delta_1(\varepsilon,F_\varepsilon,F)|\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))|F_\varepsilon(\tau)-F(\tau)|d\tau+\\ +\frac{1}{\varepsilon}|F_\varepsilon(x)-F(x)|\le\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon),(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0);\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^x h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x)-\phi_0(\tau))\{\int\limits_\tau^x h_0(\tilde\tau)|\ \upsilon(\tilde\tau)+\xi_\varepsilon(\tilde\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau)\ |\times\\ \times\int\limits_0^{\tilde\tau}|K(\tilde\tau,\bar\tau)|[2|\upsilon(\bar\tau)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau)\ |(|\ \upsilon(\bar\tau)\ |+\\ +|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |)]d\bar\tau d\tilde\tau+\int\limits_\tau^x h_0(\tilde\tau)|\ \xi_\varepsilon(\tilde\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde\tau)\ |\int\limits_0^{\tilde\tau}|K(\tilde\tau,\bar\tau)|\upsilon^2(\bar\tau)d\bar\tau d\tilde\tau+\\ +\int\limits_0^\tau|K(x,\bar\tau)-K(\tau,\bar\tau)|[2|\ \upsilon(\bar\tau)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau)\ |\times\\ \times(|\ \upsilon(\bar\tau)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |)]d\bar\tau+\int\limits_\tau^x|K(x,\bar\tau)\ |\times[2|\ \upsilon(\bar\tau)\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |+\xi_\varepsilon^2(\bar\tau)+\\ +2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\bar\tau)\ |(|\ \upsilon(\bar\tau)\ |+|\ \xi_\varepsilon(\bar\tau)\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\bar\tau)]d\bar\tau\}d\tau\ |\le\frac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\tilde r_2)\times\\ \times[XC_{01}(2\tilde r_1+\tilde r_2)+2C_{01}C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C+\frac{1}{\alpha}(\tilde r_1+\|\xi_\varepsilon\|_C)\times\\ \times[2\tilde r_1C_{01}C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_{01}C_0^2\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0^2\times\\ \times[2\tilde r_1\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0[2C_0\times\\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+(2\tilde r_1+\tilde r_2)\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C+\\ +\frac{1}{\alpha}C_{01}\tilde r_1^2[X\|\xi_\varepsilon\|_C+C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]+L_K\frac{1}{\gamma\alpha}\{[X(2\tilde r_1+\tilde r_2)+\\ +2C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau]\|\xi_\varepsilon\|_C+2\tilde r_1C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau+C_0^2\times\\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau\}+C_{01}\{\frac{1}{\gamma\alpha}(2\tilde r_1+\tilde r_2)\|\xi_\varepsilon\|_C+2C_0\tilde r_1\times\end{cases}$$

$$\begin{cases} \times\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau} + 2C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}\|\xi_\varepsilon\|_C + \\ +C_0^2\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}\} \le T_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_1\|\xi_\varepsilon\|_C, \\ |\xi_\varepsilon(x)|\le \tilde{r}_2, \forall x\in[0,X], \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \mathrm{a}_5)\ \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))|(Q[\upsilon+\xi_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon])(x)-(Q\upsilon)(x)| \le \\ \le \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\{\int\limits_0^x h(\tilde{\tau})|\ \upsilon(\tilde{\tau})+\xi_\varepsilon(\tilde{\tau})+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau})\ |\times \\ \times\int\limits_0^{\tilde{\tau}} |K(\tilde{\tau},\bar{\tau})|[2|\upsilon(\bar{\tau})\ |\times|\ \xi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |+\xi_\varepsilon^2(\bar{\tau})+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |\times \\ \times(|\ \upsilon(\bar{\tau})\ |+|\ \xi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |)+\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^x h_0(\tilde{\tau})|\ \xi_\varepsilon(\tilde{\tau})+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\tilde{\tau})\ |\int\limits_0^{\tilde{\tau}} |K(\tilde{\tau},\bar{\tau})|\upsilon^2(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau}+\int\limits_0^x |K(x,\bar{\tau})\ |[2|\ \upsilon(\bar{\tau})\ |\times \\ \times|\ \xi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |+\xi_\varepsilon^2(\bar{\tau})+2\frac{1}{\varepsilon}|\ \Pi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |(|\ \upsilon(\bar{\tau})\ |+|\ \xi_\varepsilon(\bar{\tau})\ |)+ \\ +\frac{1}{\varepsilon^2}\Pi_\varepsilon^2(\bar{\tau})]d\bar{\tau}\} \le \frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)[XC_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)+2C_{01}C_0\times \\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+\frac{1}{\alpha}(\tilde{r}_1+\|\xi_\varepsilon\|_C)[2\tilde{r}_1C_{01}C_0\times \\ \times\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}+C_{01}C_0^2\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0^2\times \\ \times[2\tilde{r}_1\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}+C_6\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}]+\frac{1}{\alpha}C_{01}C_0\times \\ \times[2C_0\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}+(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\int\limits_0^x\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}]\|\xi_\varepsilon\|_C+ \\ +\frac{1}{\alpha}C_{01}\tilde{r}_1^2[X\|\xi_\varepsilon\|_C+C_0\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar{\tau}))d\bar{\tau}]+[C_{01}(2\tilde{r}_1+\tilde{r}_2)\times \end{cases}$$

$$\begin{cases} \times M_1\varepsilon^{\frac{5}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))+2C_{01}C_0M_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))]\times \\ \times\|\xi_\varepsilon\|_C+C_{01}C_0^2M_1\sqrt{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(x))\le\tilde{T}_3\sqrt{\varepsilon}+\tilde{q}_2\|\xi_\varepsilon\|_C, \end{cases}$$

здесь учтены:

$$\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau = \frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))\Big|_0^x + \int_0^x \frac{1}{\varepsilon^3}\bar\tau \times \\ \times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau)) \le \frac{1}{\varepsilon^3}x\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}\times \\ \times\int_0^x (\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))^{\frac{7}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}}\times \\ \times\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(x)) + \int_0^{\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)} \rho^{\frac{7}{2}}e^{-\rho}d\rho] \le M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \int_0^\infty \rho^{\frac{7}{2}}e^{-\rho}d\rho] = \\ = M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{8}\int_0^\infty \rho^{\frac{1}{2}}e^{-\rho}d\rho] = \sqrt{\varepsilon}M_1\frac{1}{\sqrt{2^7}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105\sqrt{\pi}}{16}] = \\ = T_1\sqrt{\varepsilon}, \\ \textit{аналогично}: \\ \int_0^x \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le M_1\varepsilon^{\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{7}{2}}e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105\sqrt{\pi}}{16}\right] = T_2\varepsilon^{\frac{5}{2}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le T_2\varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\ \int_0^x \frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}(\phi_0(\bar\tau))d\bar\tau \le T_1\varepsilon^{\frac{3}{2}}, (0 < T_i = const, i = 1,2; 0 < \varepsilon < 1).\end{cases}$$

Поэтому, имеет место

$$\begin{cases}\|\xi_\varepsilon(x)\|_c \le (1-q)^{-1}[\beta\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon) + T_0\sqrt{\varepsilon}] = \Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ q = \max(q_1 < 1, \tilde q_1 + \tilde q_2 < 1), \\ T_0 = T_3 + \tilde T_3.\end{cases} \quad (22)$$

Лемма 2. Если выполняются условия леммы 1 и (12),(22), то уравнение (10) разрешимо в $C[0,X]$, причем при ε→0 сходится к нулю в смысле $C[0,X]$.

Выводы:

А) Если выполняются условия лемм 1, 2, то решение ИУ (5) единственным образом представимо в виде (7), при этом $\forall x\in(0,X]$ решение уравнения (5) сходится (неравномерная сходимость) при ε→0 к решению уравнения (9) с оценкой:

$$\begin{cases}|\theta_\varepsilon - \upsilon| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}|\Pi_\varepsilon(x)| \le \Delta_2(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)), \\ |\Pi_\varepsilon(x)| \le C_0\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(x)).\end{cases} \quad (23)$$

Б) А в случае:

$$x = 0 : \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}F(0).$$

Кроме того, имеет место (11). Поэтому, учитывая вышеуказанные дефекты, пока не можем сказать близости решений уравнений (5) и (9) в определенном смысле.

2. Регуляризация ИУВ-1 в $Z^2(0,X)$

В этом пункте докажем теорему о регуляризируемости ИУВ-1 в $Z^2(0,X)$, чтобы полноценно оценить близость решений уравнений (5), (9) в этом пространстве.

Теорема 1. Пусть имеют место условия лемм 1,2 и имеет место (23). Тогда следуют:

1) $$\|\Pi_\varepsilon\|_{Z^2(0,X)} \le \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}}, (\gamma_1 = C_0\sqrt{M_1} e^{-\frac{7}{4}}[(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}), \qquad (24)$$

2) $$\| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2(0,X)} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon), \qquad (25)$$

3) $$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\right\|_{Z^2(0,X)} \le \tilde{M}(\varepsilon), \left(\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\right).$$

Доказательство. Рассматривая второе соотношение формулы (23) в смысле нормы пространства $Z^2(0,X)$, получим:

$$\| \Pi_\varepsilon \|_{Z^2} \le C_0 (\sup_{[0,X]} \int_0^x \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d\tau)^{\frac{1}{2}} = C_0 \sup_{[0,X]} [\tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^x +$$

$$+ \int_0^x \tau \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]^{\frac{1}{2}} = C_0 \sup_{[0,X]} [x \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) + \int_0^x M_1 2^{-\frac{7}{2}} \varepsilon^{\frac{7}{2}} (\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{7}{2}} \times$$

$$|\times \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]^{\frac{1}{2}} \le C_0\sqrt{M_1} 2^{-\frac{7}{4}} \varepsilon^{\frac{7}{4}} \sup_{[0,X]} [(\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{7}{2}} \exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x)) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{\frac{7}{2}} d\rho]^{\frac{1}{2}} \le C_0\sqrt{M_1} 2^{-\frac{7}{4}} \varepsilon^{\frac{7}{4}} [(\frac{7}{2})^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{7}{2}} + \frac{105}{16}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}} = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{7}{4}},$$

т.е., действительно, имеет место (24).

Кроме того, из первого соотношение формулы (23) на основе нормы $Z^2(0,X)$ и неравенство: $(a_1 + a_2)^n \le 2^n (a_1^n + a_2^n),\ a_1 \ge 0, a_2 \ge 0$, следует $\| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^2} \le 2[\Delta_2(\varepsilon)\sqrt{X} + \gamma_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}}] = \tilde{M}_0(\varepsilon)$.

А это означает, что и выполняется неравенство (25).

С другой стороны, учетом (см. (5)):

$$\left|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\right| = \left|\varepsilon\theta_\varepsilon + (\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F_\varepsilon(x) - \varepsilon(\theta_\varepsilon - \upsilon + \upsilon) + F_\varepsilon(x) - F(x)\right|,$$

получим

$$\left\|(\Phi\theta_\varepsilon)(x) - F(x)\right\|_{Z^2(0,X)} \le 4[\left\|F_\varepsilon(x) - F(x)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\left\|\theta_\varepsilon(x) - \upsilon(x)\right\|_{Z^2} + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{X}] \le$$

$$\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt{X} + \varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{r}_1\sqrt{X}] = \tilde{M}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Что и требовалось доказать.

Из полученных результатов пунктов 1, 2, в итоге имеем:

Утверждение 1. В условиях теоремы 1 ИУВ-1 (1) регуляризируется по правилу (5) в $Z^2(0,X)$ обобщенном смысле.

Заключение

В работе исследовано нелинейное некорректное ИУВ-1 в $Z^2(0, X)$ Решение исходного уравнения строится с помощью МР, которое позволило выявить достаточные условия разрешимости и регуляризируемости исходного уравнения в $Z^2(0, X)$

Результаты работы могут быть использованы к обратным задачам математической физики, где вырождаются нелинейные некорректные ИУВ-1 указанного класса.

Список литературы:

1. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: Теория и числ. методы. Новосибирск: Наука, 1999. 192 с.
2. Аниконов Д. С. К вопросу о единственности решения обратных задач для уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. №1. С. 3-9.
3. Бухгейм А. Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.
4. Денисов А. М. О приближенном решения уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности // Вестник Московского университета. 1980. Т. 15. С. 49-52.
5. Иманалиев М. И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. Фрунзе: Илим, 1981. 144 с.
6. Лаврентьев М. М. Регуляризация операторных уравнений типа Вольтерра // Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука. 1977. С. 199-205.
7. Омуров Т. Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
8. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19. №4. С. 970-988.
9. Сергеев В. О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода // Доклады Академии наук. Российская академия наук, 1971. Т. 197. №3. С. 531-534.
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
11. Omurov T. D., Alybaev A. M. Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations // Advances in Differential Equations and Control Processes. 2022. V. 27. P. 149-162. http://dx.doi.org/10.17654/0974324322018

References:

1. Apartsin, A. S. (1999). Neklassicheskie uravneniya Vol'terra I roda: Teoriya i chisl. metody. Novosibirsk. (in Russian).
2. Anikonov, D. S. (1979). K voprosu o edinstvennosti resheniya obratnykh zadach dlya uravnenii matematicheskoi fiziki. *Differentsial'nye uravneniya, 15*(1), 3-9. (in Russian).
3. Bukhgeim, A. L. (1983). Uravnenie Vol'terra i obratnye zadachi. Novosibirsk. (in Russian).
4. Denisov, A. M. (1980). O priblizhennom resheniya uravneniya Vol'terra pervogo roda, svyazannogo s odnoi obratnoi zadachei dlya uravneniya teploprovodnosti. *Vestnik Moskovskogo universiteta, 15*, 49-52. (in Russian).

5. Imanaliev, M. I. (1981). Obobshchennye resheniya integral'nykh uravnenii pervogo roda. Frunze. (in Russian).

6. Lavrentev, M. M. (1977). Regulyarizatsiya operatornykh uravnenii tipa Vol'terra. In *Problemy matematicheskoi fiziki i vychislitel'noi matematiki,* Moscow. 199-205. (in Russian).

7. Omurov, T. D. (2003). Metody regulyarizatsii integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo i tret'ego roda. Bishkek.

8. Magnitskii, N. A. (1979). Lineinye integral'nye uravneniya Vol'terra I i III roda. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 19*(4), 970-988. (in Russian).

9. Sergeev, V. O. (1971). Regulyarizatsiya uravnenii Vol'terra pervogo roda. *Doklady Akademii nauk. Rossiiskaya akademiya nauk, 197*(3), 531-534. (in Russian).

10. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Ya. (1986). Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moscow. (in Russian).

11. Omurov, T. D., & Alybaev, A. M. (2022). Regularization of a system of the first kind Volterra incorrect two-dimensional equations. *Advances in Differential Equations and Control Processes, 27*, 149-162. http://dx.doi.org/10.17654/0974324322018

Работа поступила в редакцию 16.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев А. М. Регуляризация некорректного интегрального уравнения Вольтерра первого рода // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №7. С. 29-40. https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/03

Cite as (APA):

Alybayev, A. (2022). Regularization of an Ill-posed Volterra Integral Equation of the First Kind. *Bulletin of Science and Practice, 8*(7), 29-40. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/03