

УДК 517.928

https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

©Акматов А. А., SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет,
г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

©Акматов А., SPIN-code 8377-0954, Osh State University,
Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru

Аннотация. В работе исследованы решения нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Матричные функции имеют несколько собственных значений, которые несколько раз меняют условия устойчивости в рассматриваемой области. При этих собственных значениях выполняются условия устойчивости, но точки смены устойчивости, начальная и критическая совпадают. Это нехарактерно для проводимых работ в этом направлении. Неясно какая оценка в этой точке. Если эту точку рассмотрим в качестве начальной точки, то справа от нее будет $O(\varepsilon)$, слева более $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, в самой точке $O(1)$. Если эту точку принять в качестве точки смены устойчивости, то получим похожую оценку. Если этой точкой будет критическая точка, то мы не приблизимся к этой точке. Поэтому выбираем начальную точку так, чтобы она оставалось в рассматриваемой области. Чтобы получить асимптотику решений использован метод последовательных приближений. Решение поставленной задачи рассматривается в комплексной плоскости. Собственные значения — аналитические функции, поэтому используя линии уровня обе части аналитических функций можно покрывать линиями рассматриваемой области. При исследовании решения выбраны пути интегрирования и получена соответствующая оценка. В результате доказаны единственность и равномерные сходимости решений.

Abstract. Solutions of nonlinear singularly perturbed differential equations are studied in this work. The matrix functions have multiple eigen values, which change the stability conditions the region under consideration several times. For these eigen values, the stability conditions are satisfied, but the stability change points, initial and critical, coincide. This is not typical for ongoing work in this direction. It is not clear what the estimate is at this point. If we consider this point as the starting point, then to the right of $O(\varepsilon)$ it will be, to the left more, $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ at the point itself $O(1)$. If this point is taken as the point of change of stability, then we obtain a similar estimate. If this point is a critical point, then we will not approach this point. Therefore, we choose the starting point so that it remains the area under consideration. To obtain the asymptotics of solutions, the method of successive approximations is used. The solution of the stated problem is considered in the complex plane. Eigen values are analytic functions, therefore, using level lines, both parts of analytic functions can be covered with lines of the region under consideration. When investigating the solution, integration paths were chosen and the corresponding estimate was obtained. As a result, the uniqueness and uniform convergence of solutions are proved.

Ключевые слова: устойчивость, малый параметр, сингулярные возмущения, начальная точка, асимптотика, решение, последовательные приближения, линии уровня, дифференциальные уравнения, сходимость, бесконечно малые величины.

Keywords: stability, small parameter, singular perturbations, initial points, asymptotes, solution, successive approximations, level lines, differential equations, convergence, infinitesimals.

Ранее проводимые работы в этом направлении хорошо изучены. Так, в работах [1, 2, 5, 9–15, 17] рассмотрены случаи, когда собственные значения имели в действительной части значения отличные от нуля, т. е. $\lambda_k(t) = \alpha(t) \pm i\beta(t)$, $k = 1, 2$. В этих случаях определены устойчивые и неустойчивые интервалы относительно действительной области. Получены соответствующие оценки.

В предлагаемой работе рассматриваются собственные значения, которые несколько раз меняют условия устойчивости. При этом точки смены устойчивости, начальная и критическая совпадают.

Собственные значения кратные, рассматриваемые задачи нелинейные. В этом случае решение рассматриваемые задач можно оценить и в действительной области, но мы получим решение задачи в комплексной области.

Чтобы не было совпадения точки смены устойчивости, с начальной и критической точками, выбираем начальную точки определенным образом.

Цель исследования. Доказать асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задач, когда действительные части собственных значений имеют несколько устойчивых и неустойчивых интервалов. Рассмотрены случаи, при которых точки смены устойчивости, критическая [2] и начальная совпадают.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$y'(t, \varepsilon) = D(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon f(t, y(t, \varepsilon)) \quad (1)$$

$$y(t_0, \varepsilon) = y^0, \quad (2)$$

где $D(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t))$, среди собственных значений матрицы есть кратные, $y(t, \varepsilon) = \text{colon}(y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_k(t, \varepsilon))$, $t \in \Omega \subset C$, $0 < \varepsilon$ -малый параметр, $f(t, y(t, \varepsilon)) = \text{colon}(f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_k(t, \varepsilon))$, $[t_0, T]$ -отрезок действительной оси, $t_0 < T, (t_0 > -T)$, $Q(\Omega)$ -пространство аналитических функций, C — комплексная плоскость, $k = \overline{1, n}$.

Пусть выполняются условия:

$$\lambda_k(t) \in Q(\Omega), \forall t \in \Omega (\lambda_k(t) \neq 0, k = \overline{1, n}), \quad (3)$$

$$f(t, y(t, \varepsilon)) \in Q(H), H = \{(t, y) | t \in \Omega, |y| < \delta > 0\},$$

$$\forall \tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in \{|y| \leq \delta\} \left(|f(t, \tilde{y}) - f(t, \tilde{\tilde{y}})| \leq M(\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}) \right), 0 < M - \text{const} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\Omega = \{(t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) \leq 0, k = \overline{1, n}\} \quad (5)$$

$$\Omega_1 = \{(t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) \leq -\varepsilon, k = \overline{1, n}\} \quad (6)$$

$$\Omega_2 = \{(t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) \leq \varepsilon \ln \varepsilon, k = \overline{1, n}\} \quad (7)$$

$$\Omega_3 = \left\{ (t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) \leq -d \left(\varepsilon \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, k = \overline{1, n}, 0 < d < 1, n \in N \right\} \quad (8)$$

$$\Omega_4 = \{(t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) \leq -d, k = \overline{1, n}, 0 < d < 1\} \quad (9)$$

где $u_k(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds, (k = \overline{1, n}), t_1, t_2 \in R, \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \Omega$. При этом $\Omega \subset C$ вся

комплексная плоскость.

Справедлива теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия (3), (4). Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для нее справедлива оценка:

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C} \delta(\varepsilon) \quad (10)$$

где $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, t \in C, \tilde{C}$ — постоянное число.

Доказательство. От задачи (1), (2) переходим к эквивалентному уравнению:

$$y(t, \varepsilon) = y_0(\varepsilon)E(t, t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) f(\tau, y(\tau, \varepsilon)) d\tau \quad (11)$$

где $E(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t D(s) ds\right)$.

Решение уравнение (11) найдем методом последовательных приближений:

$$y^{(0)}(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad (12)$$

$$y^{(n)}(t, \varepsilon) = y^0 E(t, t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) f(\tau, y_{n-1}(\tau, \varepsilon)) d\tau,$$

где $E(t, t_0, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t D(s) ds\right), n \in N$.

Первообразная функция от собственных значений

$$z(t, t_0) = \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds = u_k(t) \pm i \vartheta_k(t) \quad (13)$$

где $u_k(t, t_0) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds$, $\mathcal{G}_k(t, t_0) = \operatorname{Im} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds$, $k = \overline{1, n}$, $t_0, t \in C$.

Линии уровня определяющиеся из (13) являются компенсирующими друг друга. В связи с этим при пограничных слоях можно использовать линии уровня $\mathcal{G}_k(t, t_0) = -d, 0 < d < 1, k = 1, 2$. Если использовать обе линии уровня одновременно, то имеем полное покрытие рассматриваемой области.

Определены пути интегрирования $l_n, \tilde{l}_n, (n \in N)$, n приближения и соединение точки $(t_0, 0)$ с точкой $(t_1; t_2)$. В каждом приближении пути интегрирования $l_n = l_n^j, (j = \overline{1, n})$ состоят из отрезков этих путей. Путь интегрирования \tilde{l}_n выбирается симметрично l_n .

Область, определяемая равенством (6) является простирающимися пограничными слоями. Этому дана оценка в работе [14].

Область, определяемая (7) является переходной для пограничных слоев. Это установлено в работе [14].

Область, определяемая (8) является исключаемой регулярной областью, поэтому для получения оценки равенства (12) можно выбирать пути интегрирования.

Область, определяемая (9) является уверенной регулярной областью. В этой области, учитывая равенства (12) также можно выбрать пути интегрирования для получения оценки.

Учитывая пути интегрирования, производим оценку последовательных приближений $y^{(1)}(t, \varepsilon) = y^0 E(t, t_0, \varepsilon) + \int_{l_1} E(t, \tau, \varepsilon) f(t, 0) d\tau$.

Оценка задачи (1), (2) оценивается таким образом $\|y^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C} \delta(\varepsilon)$, где \tilde{C} — некоторая постоянная. Далее учитывая условия (4) имеем

$$\|y^{(2)}(t, \varepsilon)\| \leq \|y^{(1)}(t, \varepsilon)\| + \int_{l_2} |E(t, \tau, \varepsilon)| \times |f(\tau, y^{(1)}(\tau, \varepsilon) - f(\tau, 0))| d\tau \leq \tilde{C} \delta(\varepsilon) + (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^2, \text{ где } \tilde{C} —$$

некоторая постоянная.

Предположив справедливость неравенства

$$\|y^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C} \delta(\varepsilon) + (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^2 + \dots + (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^n, \text{ где } \tilde{C} — \text{ некоторая постоянная, } n \in N.$$

Устанавливаем доказательство справедливости оценки (10).

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Имеем

$$\|y^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C} \delta(\varepsilon) < 1, \|y^{(2)}(t, \varepsilon) - y^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^2 < 1,$$

$$\|y^{(3)}(t, \varepsilon) - y^{(2)}(t, \varepsilon)\| \leq (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^3 < 1. \text{ Предположим, что выполняется неравенство}$$

$$\|y^{(n-1)}(t, \varepsilon) - y^{(n-2)}(t, \varepsilon)\| \leq (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^{n-1} < 1. \text{ Докажем справедливость оценки}$$

$$\|y^{(n)}(t, \varepsilon) - y^{(n-1)}(t, \varepsilon)\|. \text{ Имеем } \|y^{(n)}(t, \varepsilon) - y^{(n-1)}(t, \varepsilon)\| \leq (\tilde{C} \delta(\varepsilon))^n < 1.$$

Построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y^{(k)}(t, \varepsilon) - y^{(k-1)}(t, \varepsilon)) \tag{14}$$

Если ряд (14) сходится равномерно, то последовательность $\{y^{(n)}(t, \varepsilon)\}$ сходится равномерно.

Докажем равномерную сходимость ряда. Имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (y^{(k)}(t, \varepsilon) - y^{(k-1)}(t, \varepsilon)) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|y^{(k)}(t, \varepsilon) - y^{(k-1)}(t, \varepsilon)\| = \|y^{(1)}(t, \varepsilon) - y^{(0)}(t, \varepsilon)\| +$$

$$+ \|y^{(2)}(t, \varepsilon) - y^{(1)}(t, \varepsilon)\| + \dots + \|y^{(n)}(t, \varepsilon) - y^{(n-1)}(t, \varepsilon)\| + \dots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2 +$$

$$+ \dots + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^n + \dots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^{n+1}}{1 - \tilde{C}\delta(\varepsilon)} \right).$$

В рассматриваемой области $\|y^{(n)}(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^{n+1}}{1 - \tilde{C}\delta(\varepsilon)} \right)$, и при $n \rightarrow \infty$ получим

$\|y(t, \varepsilon)\| \leq \tilde{C}\delta(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть собственные значения матрицы являются кратными комплексно-сопряженными $\lambda_1(t) = \lambda_3(t) = t^3 - t + i(2t^2 - 1)$ и $\lambda_2(t) = \lambda_4(t) = t^3 - t - i(2t^2 - 1)$. Если действительная часть собственных значений отрицательна в интервалах $t \in (-\infty; -1) \cup (0, 1)$ — то это устойчивый интервал, при $t \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ — неустойчивый интервал, а $t = \pm 1$ — точки перехода от устойчивого к неустойчивому интервалу, $t = 0$ — точка перехода от неустойчивого к устойчивому интервалу.

Действительная часть характеристической функции равна

$$\operatorname{Re} \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \quad (15)$$

Решая (15) как уравнения, найдем $t_1 = -\sqrt{2}$, $t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = \sqrt{2}$. При $t \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ — сингулярная область, а при $t \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$ — регулярная область. Если за начальную точку возьмем $t = -\sqrt{2}$, то точка $t = 0$ одновременно является и точкой смены устойчивости, и начальной и критической. Поэтому начальную точку выберем иначе, с дополнительным условием.

Результаты и обсуждения

Подведя итог, можем сказать, что последовательность $\{y^{(n)}(t, \varepsilon)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t, \varepsilon)$, которая является решением уравнения (1). Надо отметить что, если $t \in \Omega_4$, то имеем оценку равную $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Эта область является уверенной регулярной областью. Если $t \in \Omega_3$, то область является исключаемой регулярной областью и верна оценка (10). В свою очередь при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta(\varepsilon)$ — является бесконечно малой величиной, но $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$. Поэтому для разных областей, получаем разные оценки.

В работах [1, 2, 5, 9–15, 17] рассмотрена область, в которой для собственных значений выполняются условия (5), определяемые области совпадают. В данном случае, тоже требуем выполнение условия (5), но они выражают разные области, имеющие общие границы. Это связано с выбором собственных значений. Если потребуем выполнения условия как в работах [1, 2, 5, 9–15, 17], то имеем граничные линии. Граничными линиями являются критические линии уровня функции $u(t), t \in C$. Тогда в качестве рассматриваемых областей возьмем эти линии.

Заметим, что оценки решения задачи (1), (2) зависят только от особых точек, собственных значений матрицы $D(t)$. Поэтому в качестве рассматриваемой области возьмем всю комплексную плоскость удовлетворяющую условию (5).

Если точки смены устойчивости, начальная и критическая точка совпадают, то такие случаи рассмотрены в работе [2]. Рассматриваемая задача была линейная, и ограничена первым приближением. Здесь мы поступим так, чтобы эти точки не совпадали, рассматриваемые области были наибольшими, а собственные значения кратными аналитическими функциями. Случаи, при которых собственные значения есть дифференцируемые функции рассмотрены в работе [17].

Если собственные значения состоять от мнимых частей, то исследовать решение задачи (1), (2) можно как в работах [3, 4, 16]. Переходя к другому пространству можно рассмотреть как в работах [6–8].

Выводы

Решение (1), (2) зависят от выбора собственных значений матрицы $D(t)$ и выбора начальной точки. В работе доказана теорема, при помощи которой выполняются условия устойчивости. А также показана зависимость решения задачи не только от условий устойчивости, а также и от гармонических функций $u_k(t) \leq 0, (k = 1, 2), t \in C$. В данной работе областью исследования является комплексная плоскость. Следовательно, на оценки решений (1), (2) влияют только пограничные области Ω_3 .

Если поставим условия выбора начальной точки, то получим задачи, которые внутри рассматриваемой области собственными значениями матрицы несколько раз меняет условия устойчивости. В данном случае также доказано асимптотическая близость решений.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001.
2. Акматов А. А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости // Вестник Ошского государственного университета. 2008. С. 79-82.
3. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.
4. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 3021. Т. 3. №1. С. 26-33.
5. Акматов А. А. Применение вычетов при исследовании решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Евразийское научное объединение. 2022. №1. С. 1-3.
6. Акматов А. А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 10-17. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01>
7. Акматов А. А. Асимптотика решений однородного бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения в теории обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 18-25. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02>
8. Акматов А. А. Бисингулярная задача с δ -образной неоднородностью // Евразийское научное объединение. 2022. №1. С. 3-6.

9. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Ош, 1984. 260 с.
10. Каримов С., Акматов А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Естественные и технические науки. 2006. №1. С. 14.
11. Каримов С., Анарбаева Г., Абдилазизова А. А. Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2016. №4. С. 49-61.
12. Каримов С., Акматов А. А., Ысакова М. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости (случай, где собственные значения не имеют нулей на границе рассматриваемой области H) // Естественные и технические науки №3. 2006. С. 18-22.
13. Каримов С., Акматов А. А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости Π // Естественные и технические науки. 2006. №2. С. 14-18.
14. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2017.
15. Турсунов Т. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Ош, 2013.
16. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.
17. Талиев А. А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений с неаналитическими правыми частями при потере устойчивости: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ош, 2015.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: Dr. diss. Dzhalal-Abad. (in Russian).
2. Akmatov, A. A. (2008). Asimptoticheskoe povedenie reshenii singulyarno vozmushchennykh zadach v sluchae neodnokratnoi smeny ustoichivosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 79-82. (in Russian).
3. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 3(1), 19-26. (in Russian).
4. Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 3(1), 26-33. (in Russian).
5. Akmatov, A. A. (2022). Primenenie vychety pri issledovanii reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii. *EvrAziiskoe nauchnoe ob'edinenie*, (1), 1-3. (in Russian).
6. Akmatov, A. (2022). The Regularization Method of Solutions a Bisingularly Perturbed Problem in the Generalized Functions Space. *Bulletin of Science and Practice*, 8(2), 10-17. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01>

7. Akmatov, A. (2022). Solutions Asymptotics of a Homogeneous Bisingularly Perturbed Differential Equation in the Generalized Functions Theory. *Bulletin of Science and Practice*, 8(2), 18-25. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02>
8. Akmatov, A. A. (2022). Bisingulyarnaya zadacha s δ -obraznoi neodnorodnost'yu. *Evraziiskoe nauchnoe ob"edinenie*, (1), 3-6. (in Russian).
9. Karimov, S. (1984). Asimptotika reshenii nekotorykh klassov differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri proizvodnykh v sluchae smeny ustoichivosti toчки pokoya v ploskosti "bystrykh dvizhenii": Dr. diss. Osh. (in Russian).
10. Karimov, S., & Akmatov, A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, (1), 14. (in Russian).
11. Karimov, S., Anarbaeva, G., & Abdilazizova, A. A. (2016). Bolee tochnye otsenki resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (4), 49-61. (in Russian).
12. Karimov, S., Akmatov, A. A., & Ysakova, M. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti (sluchai, gde sobstvennye znacheniya ne imeyut nulei na granitse rassmatrivaemoi oblasti N). *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, (3), 18-22. (in Russian).
13. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti II. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, (2), 14-18. (in Russian).
14. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami: Dr. diss. Dzhahal-Abad.
15. Tursunov, T. A. (2013). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennykh obyknovennykh i ellipticheskikh differentsial'nykh uravnenii: Dr. diss. Osh.
16. Karimov S., & Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1(1), 61-70. (in Russian).
17. Taliev, A. A. (2015). Asimptoticheskie povedenie reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii s neanaliticheskimi pravymi chastyami pri potere ustoichivosti: Ph.D. diss. Osh.

Работа поступила
в редакцию 29.03.2022 г.

Принята к публикации
03.04.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А. Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 24-31. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02>

Cite as (APA):

Akmatov, A. (2022). Asymptotics of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice*, 8(5), 24-31. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02>