УДК 517.918 https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*©**Акматов А. А.**, SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет,*
*г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

# INVESTIGATION OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

*©**Akmatov A.**, SPIN-code 8377-0954, Osh State University,*
*Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

*Аннотация.* В работе исследованы решения линейные системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, в случае, когда матрица функция имели кратные собственные значения. А также при исследовании решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений применим метод линии уровня. Определим устойчивого и неустойчивого интервала. Начальную точку берем в устойчивом интервале. Переходя к комплексной области, определим область, которые исследуется решения рассматриваемой задачи. Определяемые области около особой точки делим на несколько областей. В каждой области оценим решения задачи. Для этого выбираем пути интегрирования, докажем лемму и теорему. В итоге докажем асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи.

*Abstract.* Solutions of linear systems of singularly perturbed differential equations are investigated in the work, in the case when the matrix function had multiple eigenvalues. And also in the study of solutions to a system of singularly perturbed differential equations, we apply the level line method. We define a stable and unstable interval. We take the starting point in stable intervals. Passing to the complex domain, we define the domain that we study for solutions of the problem under consideration. We divide the defined areas near the singular point into several areas. In each area, we estimate the solutions of the problem. To do this, we choose the integration path and prove the lemma and theorem. As a result, we will prove the asymptotic proximity of the solutions of the perturbed and unperturbed problems.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения, особая точка, сингулярные возмущения, асимптотика, устойчивость, задача Коши, пограничный слой.

*Keywords:* differential equations, singular point, singular perturbations, asymptotics, stability, Cauchy problem, sequence, boundary laver.

Если собственные значения матрицы имеют действительную часть, тогда определим устойчивые и неустойчивые интервалы [2, 5, 8]. Из устойчивого интервала выбираем начальную точку, которая является начало рассматриваемой области задачи. Переходим к комплексной области. В основном рассмотрим пограничную область, разделяя к нескольким областям. В работе рассматривается случай, когда матрица функция имеет кратные комплексно-сопряженные собственные значения.

Если в задаче неоднородная часть имеет полюсы, то оценку можно получить с помощью вычета [5].

*Цель исследования.* Доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных и невозмущенных задач. Для этого выбираем начальную точку в устойчивом интервале. Переходим к комплексной плоскости и определим область исследования задачи. Чтобы получить оценку докажем лемму и теорему.

*Материалы и методы исследования*

Рассмотрим систему

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t) \tag{1}$$

где $\varepsilon -$малый параметр $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$; $A(t)=(a_{j,k}(t))_1^n$, $f(t)=colon(f_1(t), f_2(t),..., f_n(t))$, $x(t,\varepsilon)=colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),..., x_n(t,\varepsilon))-$неизвестная искомая функция. Матрица функция $A(t)$ имеет кратные собственные значения.

Рассмотрим область $H_0=\left\{(t_1,t_2): u_k(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda_k(\tau)d\tau\le 0\,(k=1,2)\right\}$, причем $T_0$ определяется из условия $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{T_0}\lambda_k(\tau)d\tau=0\ (k=1,2)$.

Требуем выполнение следующих условий.

$\vartheta_1$. Пусть матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_k(t)=\alpha(t)\pm i\beta(t)$, такие, что $\alpha(t)<0$ при $t_0\le t<a_0$; $\alpha(t)>0$ при $a_0<t\le T_0$, причем $\alpha(0)=0$, но $\beta(0)\ne 0$, $k=\overline{1,n}$, $t_0, T_0 -$постоянные числа. Будем считать, что $t=t_1+it_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, $\tau_1,\tau_2,t_1,t_2-$ действительные переменные.

$\vartheta_2$. Пусть $\hat{O}(H_0)-$пространство аналитических функций в области $H_0$ и $a_{j,k}(t)\in\Phi(H_0)$, $f_k(t)\in\phi(H_0)$ $(k=\overline{1,n})$;

$\vartheta_3$. Пусть существует единственная точка $(t_1^*,t_2^*)-$ такая, что $\lambda_1(t_1^*,t_2^*)=0$; $\lambda_2(t_1^*,\bar{t}_2^*)=0$.

Возможны три случая:

1). $(t_1^*,t_2^*)\in H_0$ $(\mathrm{Re}\int_{t_0}^{(t_1^*,t_2^*)}\lambda_k(\tau)d\tau=0)$;

2). $(t_1^*,t_2^*)\,\overline{\in}\, H_0$;

3). $(t_1^*,t_2^*)-$бесконечно удаленная точка.

Начальная задача Коши для системы (1), с учетом условия $\vartheta_1$:

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon) \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в классе $\Phi(H_0)$. Вырожденная система имеет вид:

$$A(t)\tilde{x}(t)+f(t)=0 \tag{3}$$

Вырожденная система (3) имеет решение $\tilde{x}(t)=-A^{-1}(t)f(t)\equiv g(t)$, где $A^{-1}(t)$ имеет особенности в точках $(t_1^*,t_2^*)$, $(t_1^*,\bar{t}_2^*)$.

Пусть $x(t,\varepsilon)=g(t)+y(t,\varepsilon)$, где $y(t,\varepsilon)$ - новая неизвестная функция. Тогда система (1) имеет вид:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=A(t)y(t,\varepsilon)-\varepsilon g'(t) \tag{4}$$

Существует неособенная преобразующая матрица $K(t)-$такая, что $K^{-1}AK=D(t),$ где $D(t)=diag(\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_n(t)).$ Пусть $y(t,\varepsilon)=K(t)z(t,\varepsilon)$, где $z(t,\varepsilon)$ - новая неизвестная вектор функция. Тогда (4) имеет вид:

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon)=D(t)z(t,\varepsilon)+\varepsilon[h(t)+B(t)z(t,\varepsilon)], \tag{5}$$

где $h(t)=-K^{-1}(t)g'(t), B(t)=-K^{-1}(t)K'(t)$.

Невозмущенная система для (5) имеет вид: $D(t)\tilde{z}(t)=0\Rightarrow\tilde{z}(t)\equiv 0$. Поэтому можно задать начальные условия:

$$z(t_0,\varepsilon)=z_0(\varepsilon)=O(\varepsilon) \tag{6}$$

Пусть $\{C_1\}$ $(u_1(t_1,t_2)=C_1)$ соединяет точки $(t_{01},0),(T_1,0),$ а $\{C_2\}$ $(u_2(t_1,t_2)=C_2)$точки $(t_{02},0),(T_2,0),$ $(t_0<t_{01}<t_{02}<a_0,a_0<T_2<T_1<T_0,\ t_0=-1;\ T_0=1,\ a_0=0)$. Рассмотрим полосу $P$ ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$, отрезками действительной оси $[t_{01},t_{02}],[T_2,T_1]$.

На полосе $P$ рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b, \tag{7}$$

где $a=\dfrac{C_2-C_1}{T_2-t_{01}}, b=\dfrac{C_1T_2-C_2t_{01}}{T_2-t_{01}}$.

*Основная лемма.* Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C$ $(C_2\le C\le C_1)$ полностью покрывает полосу $P$ и произвольная точка $(t_1,t_2)$ полосы $P$ принадлежит единственной линии уровня $\{C\}$, $\operatorname{Im}\lambda_1(t)\ne 0$, то уравнение (7) в полосе $P$ определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $t_2=\phi(t_1)$ с областью существования $(t_{01}\le t\le T_2)$, кривая $(K_0)$, определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0),$ причем $u_1(t_1,\phi(t_1))$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

*Доказательство.* Пусть $\psi(t_1)=at_1+b$. Так как $\psi(t_1)$монотонно убывает на отрезке $[t_{01},T_2]$ и $\psi(t_{01})=C_1$, $\psi(T_2)=C_2<C_1$, то при$(t_{01}\le t\le T_2)$ справедливо $C_1\ge\psi(t_1)\ge C_2$. Рассмотрим линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C$ $(C_2\le C\le C_1)$. Линии уровня $\{C\}\subset P$по заданному значению $C$ однозначно определяется значение $t_1=t_1^*$ из равенства $\psi(t_1^*)=C(t_1^*=\dfrac{C-a}{a}),$ причем $t_1^*\in[t_{01},T_2]$. Теперь через точку $(t_1^*,0)$ проведем прямую параллельную на оси

 

Т. 8. №5. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/78

ординат. Эта прямая с линией уровня $\{C\}$ пересекается в единственной точке $(t_1^*, t_2^*)$, $(\operatorname{Im}\lambda_1(t) \neq 0)$.

Таким образом, каждому значению $t_1 = t_1^* \in [t_{01}, T_2]$ соответствует единственная точка $(t_1^*, t_2^*) \in \{C\}$ такой, что $u_1(t_1^*, t_2^*) = C = \psi(t_1^*) = at_1^* + b$, причем $u_1(t_{01}, 0) = C_1 = \psi(t_{01}) = C_1$; $u_2(T_2, 0) = C_2 = \psi(T_2) = C_2$. Существование кривой $(K_0)$, соединяющей точки $(t_{02}, 0), (T_2, 0)$, целиком принадлежащей полосе $P$ и имеющей уравнение (7) доказано.

Так как $u_{1/2}(t_1, t_2) = -\operatorname{Im}\lambda_1(t_1, t_2) \neq 0$, то из (7) определяется однозначная непрерывно дифференцируемая функция, $t_2 = \varphi(t_1)$, $\left(\varphi(t_1) = \frac{\operatorname{Re}\lambda_1(t_1, t_2) - a}{\operatorname{Im}\lambda_1(t_1, t_2)}\right)$, $u_1(t_1, t_2) \equiv at_1 + b$ т. е. $u_1(t_1, \varphi(t_1))$ – убывает на $[t_{01}, T_2]$. Лемма полностью доказана.

Основная лемма своеобразным методом доказана в работе [1]. Здесь мы привели другое доказательство. Возьмем кривую $(K_0^*)$ симметричную к $(K_0)$. Область ограниченный $(K_0)$ и $(K_0^*)$ обозначим через $K \subset H_0$.

1). Пусть $C_1 = \frac{1}{2}\varepsilon \ln \varepsilon$, $C_2 = \varepsilon \ln \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq e^{-1}$. Тогда $t_{01} = t_0 + \alpha(\varepsilon)$, $t_{02} = t_0 + \beta(\varepsilon)$, $T_2 = T_0 - \beta(\varepsilon)$, где

$$\alpha(\varepsilon) = -\frac{1}{2}(\varepsilon \ln \varepsilon) + \frac{1}{8}(\varepsilon \ln \varepsilon)^2 - \frac{1}{16}(\varepsilon \ln \varepsilon)^3 + \frac{5}{128}(\varepsilon \ln \varepsilon)^4 - \ldots;$$

$$\beta(\varepsilon) = -\varepsilon \ln \varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon \ln \varepsilon)^2 - \frac{1}{2}(\varepsilon \ln \varepsilon)^3 + \frac{5}{8}(\varepsilon \ln \varepsilon)^4 - \ldots .$$

В этом случае область $K$ обозначим через $K_\varepsilon \subset H_0$. Величины $a, b$ принимают значения $a = \frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{2(T_0 - t_0 - \alpha(\varepsilon) - \beta(\varepsilon))}$, $b = \frac{\varepsilon \ln \varepsilon[T_0 - 2t_0 - 2\alpha(\varepsilon) - \beta(\varepsilon)]}{2(T_0 - t_0 - \alpha(\varepsilon) - \beta(\varepsilon))}$.

2). Пусть $C_1 = -\frac{1}{2}\delta$, $C_2 = -\delta$, где $\delta - const$, причем $0 < \delta << 1$. Тогда $t_{01} = t_0 + \alpha, T_1 = T_0 - \alpha$; $t_{02} = t_0 + \beta$, $T_2 = T_0 - \beta$, где

$$\alpha = +\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{1}{16}\delta^3 + \frac{5}{64}\delta^4 + \ldots, \quad \beta = \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^3 + \frac{5}{8}\delta^4 + \ldots .$$

В этом случае область $K$ обозначим через $H_C \subset H_0$. Величины $a, b$ принимают значения $a = -\frac{\delta}{2[T_0 - t_0 - \alpha - \beta]}$, $b = \frac{-\delta[T_0 - 2t_0 - 2\alpha - \beta]}{2[T_0 - t_0 - \alpha - \beta]}$.

3). Пусть $C_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon$, $C_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^p$, где $0 < p < 1$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Тогда $t_{01} = t_0 + \gamma(\varepsilon), T_1 = T_0 - \gamma(\varepsilon)$; $t_{02} = t_0 + \delta(\varepsilon), T_2 = T_0 - \delta(\varepsilon)$, где

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 + \frac{5}{128}\varepsilon^4 + \ldots; \; \delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^p + \frac{1}{8}\varepsilon^{2p} + \frac{1}{16}\varepsilon^{3p} + \frac{5}{128}\varepsilon^{4p} + \ldots .$$

В этом случае область $K$ обозначим через $S_\varepsilon \in H_0$. Величины $a,b$ принимает значение $a = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon^p}{2[T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \delta(\varepsilon)]}$; $b = \dfrac{\varepsilon^p[t_0 + \gamma(\varepsilon)] - \varepsilon[T_0 - \delta(\varepsilon)]}{2[T_0 - t_0 - \gamma(\varepsilon) - \delta(\varepsilon)]}$.

*Теорема.* Пусть выполняются условия $\vartheta_1 - \vartheta_3$. Тогда задача (5), (6) имеет единственное решение и для нее справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \tag{8}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $t \in C$, $\tilde{C}$ - постоянное число.

*Доказательство.* Задача (5), (6) равносильна задаче:

$$z(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[h(\tau) + B(\tau)z(\tau,\varepsilon)]d\tau \tag{9}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds)$. Систему (9) будем решать методом последовательных приближений: $z_0(t,\varepsilon) \equiv 0$; $z_m(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_{m-1}(\tau,\varepsilon)d\tau$ ,где

$z_1(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau$ .Пусть $\delta -$ постоянное, причем $0 < \delta << 1$;
$H_\varepsilon = \{(t_1,t_2): 2u_k(t_1,t_2) \le \varepsilon \ln \varepsilon, (k = 1,2)\}$;
$T_\varepsilon = \{(t_1;t_2): (t_1,t_2) \in H_0 \ и \ \varepsilon \ln \varepsilon \le 2u_k(t_1,t_2) \le 0 \ (k = 1,2)\}$;
$H_\delta = \{(t_1,t_2): (t_1,t_2) \in H_0 \ и \ 1 - (sign t_2)t_2 \ge \delta\}$; $H_t = \{(t_1,t_2): (t_1,t_2) \in H_0 \ и \ 1 - (sign t_2)t_2 \le \delta\}$.

По теореме Коши интеграл от аналитической функции зависит от начальной и от конечной точки. Таким образом, как ожидалось, оценка (8) остается в силе, когда $l \subset H_0$.

Пусть $B(t) = (b_{k,J}(t))_1^n$, $\|B(t)\| = O(1)$ при $(t_1;t_2) \in H_0$.

$$z^{(m)}(t,\varepsilon) = z_k^{(1)}(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E_k(t,\tau,\varepsilon)\left[b_{k1}(\tau)z_1^{(m-1)}(\tau,\varepsilon) + b_{k2}(\tau)z_2^{(m-1)}(\tau,\varepsilon)\right]d\tau,$$

где $E_k(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \lambda_k(s)ds\right)$ $(k = 1,2,\ldots)$, $(m = 1,2,\ldots)$

Имеют места оценки:

$$\left|z_k^{m)}(t,\varepsilon)\right| \le \left|z_k^{(1)}(t,\varepsilon)\right| + O(1)\left|\int_l \exp(\frac{1}{\varepsilon}[u_k(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)])\left[\left|z_1^{(m-1)}(\tau,\varepsilon)\right| + \left|z_2^{(m-1)}(\tau,\varepsilon)\right|\right]d\tau\right|,$$

где $l -$ путь интегрирования, соединяющие точки $t_0, t$. Для оценки функций $\{z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\}(m = 2,3,\ldots, k = \overline{1,n})$ будем использовать основную лемму.

Пусть $\tilde{K} = \Delta \cup K$, где $\Delta = \{(t_1,t_2): t_0 \le t_1 \le t_{01}, t_2 = 0\}$. Теперь будем оценивать $\{z_m^{(1)}(t,\varepsilon)\}(m = 2,3,\ldots)$ для $\forall t \in \tilde{K}$. Для всех функций $z_m^{(1)}(t,\varepsilon)$ $(m = 2,3,\ldots)$ путь интегрирования $l$ будет неизменным. Здесь также путь интегрирования $l$ определяется в зависимости от кого, какому множеству принадлежит точка $(t_1,t_2)$. Если $(t_1,t_2)\in\Delta(t=t_1,t_2=0)$, то $l$ состоит из одного отрезка прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)(t_0\le t_1\le t_{01})$. В этом случае $\operatorname{Re}\lambda_k(t)\le-\alpha,\alpha>0-const$.

Пусть $(t_1,t_2)\in K$. Тогда $l=\bigcup_{k=1}^{3} l_k$, где $l_1$-отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_{01},0)$; $l_2$-отрезок кривой $(K_0)$, соединяющий точки $(t_{01},0)$ с точкой $(t_1,t_2^*=\tilde{\varphi}(t_1))$; $l_3$ – отрезок прямой, соединяющий точки $(t_1,t_2^*)$ с точкой $(t_1,t_2)$.Заметим, что если $(t_1,t_2)\in K$, то на кривой $(K_0)$ при любом допустимом $t_1$ имеется единственная точка $(t_1,t_2^*=\varphi(t_1))$.

Для $z_m^{(2)}(t,\varepsilon)$ $(m\ge 2)$ путь интегрирования $\tilde{l}$ симметричен для $l$ относительно действительной оси.

1). Если $\tilde{K}=\Delta\cup K_\varepsilon$, то справедливы оценки:

$$\int_{l_1}\exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau_1\Big|=O(\varepsilon);$$

$$\int_{l_2}\exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau_1\Big|=O(\delta_0(\varepsilon)),\text{ где }\delta_0(\varepsilon)=\frac{1}{|\ln\varepsilon|},\ \left(0<\varepsilon\le e^{-1}\right);$$

$$\int_{l_3}\exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau_1\Big|=O(\sqrt[n+1]{\varepsilon}).$$

Следовательно, имеет места оценки $\int_{l_2}\exp\frac{1}{\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]d\tau_1\Big|=O(\delta_0(\varepsilon))$, $\left(0<\varepsilon\le e^{-1}\right)$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\left|z_k^{(2)}(t,\varepsilon)\right|\le C\omega(\varepsilon)\left[1+C\delta_0(\varepsilon)\right],\ \text{где}\ \omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon\ \ при\ \ (t_1,t_2)\in K_\varepsilon\cap H_\delta,\\ \sqrt[n+1]{\varepsilon}\ \ при\ \ (t_1,t_2)\in K_\varepsilon\cap H_t;\end{cases}\ 0<C-const.$$

Далее получим оценки:

$$\left|z_m^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le C\omega(\varepsilon)\left[1+\left(c\delta_0(\varepsilon)\right)+\left(c\delta_0(\varepsilon)\right)^2+\ldots+\left(c\delta_0(\varepsilon)\right)^{m-1}\right]\le C\omega(\varepsilon)\frac{1}{1-c\delta_0(\varepsilon)},\ \text{при}$$

$c\delta_0(\varepsilon)<1$ $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ $(k=\overline{1,n};\ m=1,2,\ldots)$.

2). Если $\tilde{K}=\Delta\cup H_c$, то имеет места оценки

$$\left|z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\right|\le CO(\varepsilon)\left[1+(c\varepsilon)+(c\varepsilon)^2+\ldots+(c\varepsilon)^{m-1}\right]\le\frac{O(\varepsilon)}{1-c\varepsilon}\ \text{при}$$

$c\varepsilon<1, 0<c-const$ $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ $(k=\overline{1,n};\ m=1,2,\ldots)$.

3). Если $\tilde{K}=\Delta\cup S_\varepsilon$, то имеет места оценки

$$\left|z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\right|\le C\omega(\varepsilon)\left[1+\left(c\varepsilon^q\right)+\left(c\varepsilon^q\right)^2+\ldots+\left(c\varepsilon^q\right)^{m-1}\right]\le\frac{C\omega(\varepsilon)}{1-c\varepsilon^q}\ \text{при}\ c\varepsilon^q<1(0<\varepsilon\le\varepsilon_0),\ \text{где}$$

$$q=\min\left\{1-q,\frac{1}{2}\right\};\ \omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon\ \ при\ \ (t_1,t_2)\in S_\varepsilon\cap H_\delta,\\ \sqrt[n+1]{\varepsilon}\ \ при\ \ (t_1,t_2)\in S_\varepsilon\cap H_t.\end{cases}\ (k=\overline{1,n};m=1,2,\ldots).$$

Т. 8. №5. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/78

Рассмотрим следующие ряды:

$$z_1(t,\varepsilon)+[z_2(t,\varepsilon)-z_1(t,\varepsilon)]+\ldots+[z_m(t,\varepsilon)-z_{m-1}(t,\varepsilon)]+\ldots. \quad (10)$$

$$C\omega(\varepsilon)\left[1+(c\delta_0(\varepsilon))+\ldots+(c\delta_0(\varepsilon))^{m-1}+\ldots\right]; \quad (11)$$

$$C\varepsilon\left[1+(c\varepsilon)+\ldots+(c\varepsilon)^{m-1}+\ldots\right]; \quad (12)$$

$$C\omega(\varepsilon)\left[1+(c\varepsilon^q)+\ldots+(c\varepsilon^q)^{m-1}+\ldots\right] \quad (13)$$

Если $K=K_\varepsilon$, или $K=H_c$, или $K=S_\varepsilon$, то ряд (10) мажорируется, соответственно, сходящимся рядом (11), или (12), или (13).

Пусть теперь $z^{(1)}(t,\varepsilon)\equiv z_1(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)z_0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(t)d\tau$. Как в работе [5] функции $z^{(m+1)}(t,\varepsilon)$ $(m=1,2,\ldots)$ рекуррентно определим следующим образом: $z^{(m+1)}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)z^{(m)}(\tau,\varepsilon)d\tau$ $(m=1,2,\ldots)$. Очевидно, что $z^{(m)}(t,\varepsilon)$ $(m=2,3,\ldots)$ не является обычным последовательным приближением искомого решения. Тогда решения задачи (5), (6), представимо в виде $z(t,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}z^{(m)}(t,\varepsilon)$.

Если $(t_1,t_2)\in K_\varepsilon$, или $(t_1,t_2)\in H_c$, или $(t_1,t_2)\in S_\varepsilon$, то, соответственно, справедлива оценка:

$$\left|z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\right|\le C\omega(\varepsilon)[c\delta_0(\varepsilon)]^{m-1} \ (k=\overline{1,n};\ m=1,2,\ldots.), \quad (14)$$

где $0<c-const, \delta_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{|\ln\varepsilon|}$ $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$, $\omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon \ при \ (t_1,t_2)\in K_\varepsilon\cap H_\delta, \\ \sqrt[n+1]{\varepsilon} \ при \ (t_1,t_2)\in K_\varepsilon\cap H_t;\end{cases}$

$$\left|z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\right|\le (C\varepsilon)^m \ (k=1,2;\ m=1,2,\ldots), 0<c-const,\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0. \quad (15)$$

$$\left|z_k^{(m)}(t,\varepsilon)\right|\le C\omega(\varepsilon)\left[c\varepsilon^q\right]^{m-1} \ (k=\overline{1,n};\ m=1,2,\ldots.), \quad (16)$$

где $\omega(\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon \ при \ (t_1,t_2)\in S_\varepsilon\cap H_\delta, \\ \sqrt[n+1]{\varepsilon} \ при \ (t_1,t_2)\in S_\varepsilon\cap H_t.\end{cases}$, $q=\min\left\{1-q,\dfrac{1}{2}\right\}$; $(0<p<1)$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Тогда решения задачи (5), (6) существует, единственно, представимо в виде $z(t,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}z^{(m)}(t,\varepsilon)$. и справедлива оценка (14) на $\tilde{K}_\varepsilon$; (15) на $\tilde{H}_c$; (16) на $\tilde{S}_\varepsilon$.

Если $(t_1,t_2)\in H_c$, или $(t_1,t_2)\in S_\varepsilon$, то для любого $n_0>0$ существует номер $N=N(n_0)$ такое, что для решения задачи (5), (6), представимое в виде $z(t,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{N}z^{(m)}(t,\varepsilon)+V_{N+1}(t,\varepsilon)$, имеет места оценки

$$\left\|V_{N+1}(t,\varepsilon)\right\|=O(\varepsilon^{n_0}). \quad (17)$$

Т. 8. №5. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/78

Заметим, что для любого числа $\alpha > 0$ при $\varepsilon \to 0$ справедлива $\varepsilon^{\alpha} = o(\delta_0(\varepsilon)).$ Поэтому если $(t_1, t_2) \in K_{\varepsilon}$ и $0 < n_0 -$ заданное число, то не всегда существует $N = N(n_0)$ такое, что имела места оценка (17). Таким образом, равномерное приближение с любой степени точностью возможно только на $H_c$ или на $S_{\varepsilon}$. Теорема доказано.

*Результаты и обсуждение*

Из выше доказанных лемм и теорем видно, установили асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных и невозмущенных задач до произвольного порядка. Если собственные значения матрицы имеют действительную часть, то можно определить устойчивый интервал. Работа обсуждено на основе примера на научном семинаре кафедры математического анализа под руководством профессора С. Каримова.

*Выводы*

Последовательность $\{z_n(t,\varepsilon\}$ равномерно сходится к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$, которая является решением уравнения (1). Если собственные значения матрицы имеют устойчивый интервал, то можно доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенной и невозмущенной задачи. Если собственные значения матрицы функции не имеет действительную часть, то асимптотическую близость решений задачи (1)-(3) можно показать, переходя к комплексной плоскости [1, 3, 4, 7]. С помощью метода регуляризации решений [6], изменяя рассматриваемое пространство можно показать асимптотическую близость решений задачи (1-3).

*Список литературы:*

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001.

2. Акматов А. А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости // Вестник Ошского государственного университета. 2008. С. 79-82.

3. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.

4. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 3021. Т. 3. №1. С. 26-33.

5. Акматов А. А. Применение вычеты при исследовании решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Евразийское научное объединение. 2022. №1. С. 1-3.

6. Акматов А. А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

7. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.

8. Каримов С., Анарбаева Г., Абдилазизова А. А. Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2016. №4. С. 49-61.

*References:*

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: Dr. diss. Dzhalal-Abad. (in Russian).
2. Akmatov, A. A. (2008). Asimptoticheskoe povedenie reshenii singulyarno vozmushchennykh zadach v sluchae neodnokratnoi smeny ustoichivosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, 79-82. (in Russian).
3. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian).
4. Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. (in Russian).
5. Akmatov, A. A. (2022). Primenenie vychety pri issledovanii reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii. *Evraziiskoe nauchnoe ob"edinenie,* (1), 1-3. (in Russian).
6. Akmatov, A. (2022). The Regularization Method of Solutions a Bisingularly Perturbed Problem in the Generalized Functions Space. *Bulletin of Science and Practice, 8*(2), 10-17. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01
7. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).
8. Karimov, S., Anarbaeva, G., & Abdilazizova, A. A. (2016). Bolee tochnye otsenki resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 49-61. (in Russian).

*Работа поступила в редакцию 25.03.2022 г.*

*Принята к публикации 31.03.2022 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 15-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

*Cite as (APA):*

Akmatov, A. (2022). Investigation of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 15-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01