ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

©Акматов А. А., *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

THE REGULARIZATION METHOD OF SOLUTIONS A BISINGULARLY PERTURBED PROBLEM IN THE GENERALIZED FUNCTIONS SPACE

©Akmatov A., *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

Аннотация. При исследовании сингулярно возмущенных задач в случае изменения устойчивости вся работа производилась в пространстве аналитических функций. Естественно, возникнут вопросы, можно ли получить оценку решений сингулярно возмущенной задачи, не выходя на комплексную плоскость. В работе первыми полученными результатами являются решения сингулярно мотивированной задачи, не переходя в комплексную плоскость. Для этого разработан метод регуляризации в пространстве обобщенных функций и получены соответствующие оценки. Если выбрать начальную точку на устойчивом интервале, то вплоть до точки перехода асимптотическая близость решений возмущенной и невозмущенной задачи имеет порядок малого параметра ε. Проблема появится, когда точка принадлежит неустойчивому интервалу. Следовательно, до этого, работы переходили в комплексную плоскость. В таких задачах существует понятие времени запаздывания решений возмущенной и невозмущенной задачи. Линии уровня появятся в сложных плоскостях. В таких задачах существует понятие времени запаздывания решений возмущенной и невозмущенной задачи. Линии уровня появятся в сложных плоскостях. В особых точках эти линии имеют линии критического уровня. Поэтому невозможно выбрать начальную точку так, чтобы получить максимальное время задержки. Но асимптотическая близость решений возмущенной и невозмущенной задач возможна при ограниченных временных задержках. Если изучать решение в пространстве обобщенных функций, то можно выбрать начальную точку с максимальной задержкой по времени. А также, не переходя на комплексную плоскость, можно установить асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи. Для этого впервые разработан метод регуляризации решений сингулярно возмущенной задачи.

Abstract. When singularly perturbed problems are investigated, in the case of a change in stability, all work was performed in the space of analytical functions. Naturally, questions will arise whether it is possible to obtain an estimate of solutions to a singularly perturbed problem without moving to the complex plane. In the work, the first results obtained are the solutions of the singularly motivated task, not moving into the complex plane. For this purpose, a method of regularization in the space of generalized functions has been developed and corresponding estimates have been obtained. If we choose the starting point in a stable interval, then up to the transition point, the asymptotic proximity of solutions to the perturbed and undisturbed problem is in the order of a small parameter ε. The problem will appear when the point belongs to an unstable interval. Therefore, prior to this, the works moved to the complex plane. In such problems, there is a concept of the delay time of solutions to the perturbed and undisturbed problem. Level lines will appear in complex planes. In such problems, there is a concept of the delay time of solutions to the perturbed and undisturbed problem. Level lines will appear in complex planes. At special points, these lines have critical level lines. Therefore, it is impossible to choose the starting point so as to get the maximum delay time. But the asymptotic proximity of solutions of perturbed and undisturbed problems is possible with limited time delays. If we study the solution in the space of generalized functions, then we can choose the starting point with the maximum time delay. And also, without passing to the complex plane, it is possible to establish the asymptotic proximity of solutions to the perturbed and undisturbed problem. For this purpose, a method of regularization of solutions of a singularly perturbed problem has been developed for the first time.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, функционал, особая точка, бисингулярные возмущения, асимптотика, устойчивость, задача Коши, носитель, регуляризация, финитность.

Keywords: differential equations, functional, singular point, bisingular perturbations, asymptotics, stability, Cauchy problem, carrier, regularization, finiteness.

Введение

В данной работе исследуем решения бисингулярно возмущенной задачи в случае смены устойчивости. Известно, что, не удается установить асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи в пространстве действительных функций [1–3, 5–7]. Поэтому, вся работа выполнялась, переходя к комплексной плоскости. В данной работе впервые разрабатываем метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенной функции $S'(R^1)$. *Цель исследования.* Доказать в пространстве обобщенных функций $S'(R^1)$, асимптотическую близость решений бисингулярно возмущенной и невозмущенной задачи. С этой целью разрабатываем метод регуляризация решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций $S'(R^1)$. В данной работе впервые покажем суть метода регуляризации [4, с. 82–102] и приведем конкретный пример.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[f(t) + B(t)y(t,\varepsilon)\right] \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0 \tag{2}$$

где $D(t) = diag(\lambda_1(t),\lambda_2(t))$, $y(t,\varepsilon) = colon(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon))$, $t \in R^1$, $0 < \varepsilon -$малый параметр, $f(t) = colon\left(f_1(t), f_2(t)\right), \left[t_0, T\right]-$ отрезок действительной оси, $t_0 < T$, C^∞ – пространство бесконечно дифференцируемых функций. Здесь $S(R^1)$ — пространство основных функций, $S'(R^1)$ — пространство обобщенных функций. Действительные части собственных значений матрицы $D(t)$ имеет устойчивые и неустойчивые интервалы.

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

Например, действительная часть собственных значений $\operatorname{Re}\lambda_k(t)<0$, ($k=1,2$) в интервале $t\in(-\infty,a_0)$, то этот интервал является устойчивым, если $\operatorname{Re}\lambda_k(t)>0$, ($k=1,2$) в интервале $t\in(a_0,+\infty)$ - неустойчивым. Если $\operatorname{Re}\lambda_k(a_0)=0$, тогда точка $t=a_0$ является точкой перехода от устойчивого интервала к неустойчивому интервалу. Такие интервалы зависят от конкретных собственных значений матрицы $D(t)$. От устойчивого интервала выбираем начальную точку задачи Коши.

Взяв, формально $\varepsilon=0$, получим невозмущенную задачу

$$D(t)\tilde{y}(t,0)=0,\ D(t)\neq 0\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет единственное решение в пространстве $S(R^1)$

$$\tilde{y}(t)=0\,. \tag{4}$$

Пусть выполняются условия:

$$\lambda_1(t)\in C^\infty,\ \lambda_2(t)\in C^\infty,\ \forall t\in C^\infty\left(\lambda_k(t)\neq 0,\ k=1,2\right), \tag{5}$$

Определение 1. Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $S(R^1)$ и обозначается $\left(y(t,\varepsilon),\phi(t)\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y(t,\varepsilon)\phi(t)dt$.

Определения 2. Финитным называют функции, которые обращаются в нуль функции вне некоторого конечного интервала.

Лемма 1. В области D, для функции $E(t,t_0,\varepsilon)=y^{(0)}(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}D(s)ds\right)$, справедлива следующая оценка

$$\left|E(t,t_0,\varepsilon)\right|\leq c\varepsilon\,, \tag{6}$$

где c - некоторая постоянная.

Доказательство. Доказательство проводим в пространстве обобщенных функций $S'(R^1)$, и составим, по определению функционала учитывая $y^{(0)}(\varepsilon)=\varepsilon$, получаем $\left(E(t,t_0,\varepsilon),\phi(t)\right)=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds}\phi(t)dt$. Финитная функция изменит пределы интеграла в окрестности особой точки $\left(E(t,t_0,\varepsilon),\phi_1(t)\right)=\varepsilon\int\limits_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds}\phi_1(t)dt=\varepsilon\phi_1(t_1)\int\limits_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds}dt$. Определим норму функции, тогда $\left\|\left(E(t,t_0,\varepsilon),\phi_1(t)\right)\right\|\leq 2\varepsilon\delta(\varepsilon)\phi_1(t_1)\exp\left(1-\frac{F(t_0)}{\varepsilon}\right)$, где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$, $\varepsilon=o\left(\delta(\varepsilon)\right)$. Отсюда видно, что доказано справедливости оценки (6) в пространстве $S'(R^1)$. Лемма доказана.

 Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

Лемма 2. В области D, для интеграла $E(t,\tau,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)f(\tau)d\tau$, справедлива следующая оценка

$$\|E(t,\tau,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon), \tag{7}$$

где $\lim_{\varepsilon\to0}\delta(\varepsilon)=0$, $\varepsilon=o(\delta(\varepsilon))$, c - некоторые постоянные.

Доказательство. Составим функционал $(E(t,\tau,\varepsilon),\phi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}E(t,\tau,\varepsilon)\phi(t)dt$. Из условия финитности функции $\phi(t)$ имеем $(E(t,\tau,\varepsilon),\phi_1(t))=\int_{-\delta(\varepsilon)}^{+\delta(\varepsilon)}E(t,\tau,\varepsilon)\phi_1(t)dt$. Из курса математического анализа известно, что если функция $E(t,\tau,\varepsilon)$ на интервале (t_0,a_0) монотонно возрастает и неотрицательна, а в интервале (a_0,t) монотонно убывает и неотрицательна, тогда по формуле Бонне будет $\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds}f(\tau)d\tau=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}(\int_{t_0}^{a_0}f(\tau)d\tau+\int_{a_0}^{t}f(\tau)d\tau)$. Если функция $f(t)$ интегрируема, тогда $\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds}f(\tau)d\tau=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}[F(t)-F(t_0)]$. Функционал имеет вид определяющим с интегралом

$(E(t,\tau,\varepsilon),\phi_1(t))=\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}F(t)\phi_1(t)dt+F(t_0)\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}\phi_1(t)dt$. Оценим каждую слагаемую 1). $\left\|\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}F(t)\phi_1(t)dt\right\|\le F(0)\phi_1(t_1)\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}dt$. Последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to0$, и $\mathrm{Re}\int_{a_0}^{t}D(s)ds>0$, $F(0)\ne0$.Оценим вторую слагаемую. Тогда 2). $F(t_0)\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}\phi_1(t)dt=F(t_0)\phi_1(t_1)\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_0}^{t}D(s)ds}dt$, который стремится к нулю при $\varepsilon\to0$. В общем случае норма интеграла $\|E(t,\tau,\varepsilon)\phi(t)\|\le c\delta(\varepsilon)$. Отсюда видно, что оценка (7) доказано. Лемма полностью доказана.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия (5). Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для нее справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\|\le\tilde{C}\delta(\varepsilon), \tag{8}$$

где $\alpha(\varepsilon)\to0,\ \varepsilon\to0$, $t\in C$, $\tilde{C}$ — постоянное число.

Доказательство. От задачи (1), (2) приходим к эквивалентному уравнению:

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

$$y(t,\varepsilon)=y^0(\varepsilon))E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[f(\tau)+B(\tau)y(\tau,\varepsilon)]d\tau, \tag{9}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)$.

Уравнение (9) будем решать методом последовательных приближений:

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0,\ y_1(t,\varepsilon)=y^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau,$$

$$y_n(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)y_{n-1}(\tau,\varepsilon)d\tau, \text{ где } E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right),\ n\in N.$$

Решение рассмотрим в R^1, поэтому имеем единственный путь интегрирования. Учитывая лемму 1 и лемму 2, производим оценку последовательных приближений

$y_1(t,\varepsilon)=y^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau$. Для первого приближения верна оценка $\|y_1(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)$, где c — некоторая постоянная. Далее, для второго приближения аналогично получаем, $\|y_2(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2$ где c — некоторые постоянные. Предположим справедливость следующего неравенства $\|y_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^n$, где c — некоторые постоянные, $n\in N$. Справедливость оценки (8) доказана.

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Имеем

$$\|y_1(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)<1, \|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)\|\le(c\delta(\varepsilon))^2<1,$$

$$\|y_3(t,\varepsilon)-y_2(t,\varepsilon)\|\le(c\delta(\varepsilon))^3<1,\ \|y_{n-1}(t,\varepsilon)-y_{n-2}(t,\varepsilon)\|\le(c\delta(\varepsilon))^{n-1}<1.$$

Докажем справедливость оценки $\|y_n(t,\varepsilon)-y_{n-1}(t,\varepsilon)\|$. Имеем что разность решений верна $\|y_n(t,\varepsilon)-y_{n-1}(t,\varepsilon)\|\le(c\delta(\varepsilon))^n<1$.Построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t,\varepsilon)-y_{k-1}(t,\varepsilon)). \tag{10}$$

Если ряд (10) сходится равномерно, то последовательность $\{y_n(t,\varepsilon)\}$ сходится равномерно.

Докажем равномерную сходимость ряда (10). Имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t,\varepsilon)-y_k(t,\varepsilon))\right\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k(t,\varepsilon)-y_{k-1}(t,\varepsilon)\|=\|y_1(t,\varepsilon)-y_0(t,\varepsilon)\|+$$
$$+\|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)\|+\ldots+\|y_n(t,\varepsilon)-y_{n-1}(t,\varepsilon)\|+\ldots=c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+$$
$$+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^n+\ldots=c\delta(\varepsilon)\times\left(\frac{1-(c\delta(\varepsilon))^{n+1}}{1-(c\delta(\varepsilon))}\right).$$

В рассматриваемой области $\|y_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)\times\left(\frac{1-(c\delta(\varepsilon))^{n+1}}{1-c\delta(\varepsilon)}\right)$,и при $n\to\infty$ получим $\|y(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)$.Теорема доказана.

На основе доказанной теоремы видно асимптотическую близость решений (8) и (4).

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

Приведем пример. Пусть матрица-функция $D(t)$ имеет сопряженные собственные значение $\lambda_1(t)=t+i$ и $\lambda_2(t)=t-i$.Определим действительную часть собственных значений $\operatorname{Re}\lambda_k(t)=t$, ($k=1{,}2$). Действительная часть собственных значениях устойчива в интервале $t\in(-\infty,0)$, и неустойчива в интервале $t\in[0,+\infty)$. Точки перехода $t=0$ также входит в неустойчивом интервале. Потому, что в окрестности точки $t=0$ и самой точке не определено устойчивость. В качестве начальной точки можно взять $-\infty<t_0<0$. Собственные значения комплексно-сопряженные, поэтому достаточно исследовать $\lambda_1(t)=t+i$. Полученные оценки выполняются аналогично. Задачи (1), (2) сведем к эквивалентной задаче вида (9), учитывая, что функция $f(t)$ интегрируема в отрезке $t\in[t_0,T]$, ($t_0<T$) в векторном виде:

$y(t,\varepsilon)=y^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[f(\tau)-B(\tau)y(\tau,\varepsilon)]d\tau$. Для одного собственного значения имеем $y_1(t,\varepsilon)=y_1^0(\varepsilon)e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)}+\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau)d\tau$. Используя лемму 1, оценим первую слагаемую $y_1^0(\varepsilon)e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)}$. Здесь $y_1^0(\varepsilon)=\varepsilon$ можно заменить, учитывая условия устойчивости собственных значений. Тогда составим функционал в пространстве $S'(R^1)$ $\left(\varepsilon e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)},\phi(t)\right)=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)}\phi(t)dt$. Определим абсолютную величину функционала

$\left|\left(\varepsilon e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)},\phi(t)\right)\right|\le\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left(t^2-t_0^2\right)}\phi(t)dt$. Функция $\phi(t)$ финитна, поэтому абсолютная величина функционала $\left|\left(\varepsilon e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)},\phi(t)\right)\right|\le\varepsilon\int\limits_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left(t^2-t_0^2\right)}\phi_1(t)dt$. Применим теоремы о среднем к функционалу $\left|\left(\varepsilon e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(t_0+i)^2\right)},\phi(t)\right)\right|\le\varepsilon\phi_1(t_1)\int\limits_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left(t^2-t_0^2\right)}dt\to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Теперь оценим интеграл $\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau)d\tau$ и составим функционал в пространстве обобщенных функций $\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau)d\tau,\phi(t)\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau)d\tau\right)\phi(t)dt$. Найдем абсолютную величину функционала $\left|\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau),\phi(t)\right)\right|\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)}f_1(\tau)d\tau\right)\phi(t)dt$. А теперь определим финитности функций $\phi(t)$: $\left|\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2-(\tau+i)^2\right)}f_1(\tau),\phi(t)\right)\right|\le\int\limits_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)}f_1(\tau)d\tau\right)\phi(t)dt$. Интеграл запишем в виде:

$\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{0} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau$. Функция $e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\tau^2}$ в интервале $t \in [t_0, 0)$ монотонно возрастает и неотрицательная, а в интервале $t \in (0, t]$ монотонно убывает и неотрицательна. Видно, что выполняется условия формуле Бонне. Интеграл можно записать в виде $\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau = e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau$. Интегрируя $\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau = e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} [F_1(t) - F_1(t_0)]$. Подставляя, этот интеграл к функционалу получаем следующие интегралы $\left| \left(\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{2\varepsilon}(t^2-\tau^2)} f_1(\tau)d\tau, \phi_1(t) \right) \right| = \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} F(t)\phi_1(t)dt + F(t_0) \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} \phi_1(t)dt$. Оценим функционал. Тогда, учитывая теорему о среднем, вычислим интеграл и получим, $\int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} F(t)\phi_1(t)dt \le e\phi_1(t_1) \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} F(t)dt = e\phi_1(t_1)[F_1(\sqrt{\varepsilon}) - F_1(-\sqrt{\varepsilon})]$. Отсюда имеем оценку равную $c\sqrt{\varepsilon}$, c - некоторые постоянные. Второе слагаемое функционала $F(t_0) \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} \phi_1(t)dt = F(t_0)\phi_1(t_1) \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}t^2} dt$. Получаем оценку равную $c\sqrt{\varepsilon}$, где c - некоторые постоянные.

В итоге для первого приближения имеем $|(y_1(t,\varepsilon), \phi(t)| \le (c\sqrt{\varepsilon}, \phi(t))$, отсюда видно что $|y_1(t,\varepsilon)| \le c\sqrt{\varepsilon}$.А и для $\lambda_2(t)$ имеем $|y_2(t,\varepsilon)| \le c\sqrt{\varepsilon}$, где c - некоторые постоянные. Последующие приближения определяются аналогично.

Результаты и обсуждение

Из выше доказанных лемм и теоремы видно, что в пространстве обобщенных функций $S'(R^1)$, можно установить асимптотическую близость решений бисингулярно возмущенных и невозмущенных задач.

Метод регуляризации обсуждено на основе примера на научном семинаре кафедры математического анализа под руководством профессора С. Каримова.

Выводы

Подведя итог, можем сказать, что последовательность $\{y_n(t,\varepsilon\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением уравнения (1). Когда собственные значения матрицы имели устойчивый интервал, то можно доказать асимптотическую близость решений бисингулярно возмущенной и невозмущенной задачи. Появится вопрос: можно ли установить асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи когда, собственные значения матрицы не имели устойчивой интервал. В этом направлении продолжим исследовании.

Список литературы

1. Абдилазизова А. А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости // Евразийское Научное Объединение. 2021. №7-1. С. 1-3. https://doi.org/10.5281/zenodo.5168522

2. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной

плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.

3. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33.

4. Владмиров В. С. Уравнения математической физики. М. 1981. С. 82-102.

5. Каримов С., Абдилазизова А. А. Асимптотические поведения решений сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Евразийское научное объединение. 2021. №7. С. 15-19.

6. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.

7. Каримов С. Акматов А. А., Анарбаева Г. М. Более точные оценки решения сингулярновозмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2016. №4. С. 49-61.

References:

1. Abdilazizova, A. A. (2021). Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi v sluchae smeny ustoichivosti. *Evraziiskoe Nauchnoe Ob"edinenie,* (7-1), 1-3. (in Russian). https://doi.org/10.5281/zenodo.5168522

2. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian).

3. Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. (in Russian).

4. Vladmirov, V. S. (1981). Uravneniya matematicheskoi fiziki. Moscow, 82-102. (in Russian).

5. Karimov, S., & Abdilazizova, A. A. (2021). Asimptoticheskie povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennoi sistemy differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Evraziiskoe nauchnoe ob"edinenie,* (7), 15-19. (in Russian).

6. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).

7. Karimov, S. Akmatov, A. A., & Anarbaeva, G. M. (2016). Bolee tochnye otsenki resheniya singulyarnovozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 49-61. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 27.11.2021 г.

Принята к публикации 03.12.2021 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

Cite as (APA):

Akmatov, A. (2022). The Regularization Method of Solutions a Bisingularly Perturbed Problem in the Generalized Functions Space. *Bulletin of Science and Practice, 8*(2), 10-17. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01