УДК 517.928
MSC 2020: 34D15; 12H25
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/03

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВОЗМУЩЕНИЯМ

*©**Акматов А. А.,** SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Шакиров К. К.,** Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kylychbek.shakirov@inbox.ru*
*©**Камбарова А. Д.,** SPIN-код 1652-3837, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, Kambarova@mail.ru*

PROBLEMS LEADING TO PERTURBATIONS

*©**Akmatov A.,** SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Shakirov K.,** Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kylychbek.shakirov@inbox.ru*
*©**Kambarova A.,** SPIN-code 8216-4750, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, Kambarova@mail.ru*

Аннотация. В работе исследуется решение однородных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Здесь выполняются условия устойчивости. В качестве начальной точки возьмем точки смены устойчивости. В окрестности этой точки появится пограничный слой, которые изучаем с помощью метода регуляризации. Особенность и новизна работы заключается в том, что здесь применен метод регуляризации к исследованию решений сингулярно возмущенной задачи.

Abstract. The paper studies solutions of homogeneous singularly perturbed differential equations with initial conditions. Here the stability conditions are satisfied. As a starting point, we take the points of stability change. The neighborhood of this point will appear a boundary layer, which we study using the regularization method. The peculiarity and novelty of the work lies in the fact that here the regularization method is applied to the study of solutions of a singularly perturbed problem.

Ключевые слова: устойчивость, регулярные и сингулярные возмущения, начальная точка, решение, биустойчивость, дифференциальные уравнения, бесконечно малые величины, малый параметр, коэффициент пропорциональности.

Keywords: stability, regular and singular perturbations, initial point, solution, bistability, differential equations, infinitesimal quantities, small parameter, coefficient of proportionality.

Введение

В работе рассматривается задачи приводящие к регулярным и сингулярным возмущениям. Для простоты рассмотрим случаи, когда математические модели были однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Когда рассмотрим, задачи по возмущениям значительную роль играет, условия устойчивости. Поэтому мы в работе тоже рассмотрим устойчивости решений дифференциальных уравнений [1–6].

Учитывая, что малый параметр ε является безразмерной величиной, составим математическую модели некоторых задач. В первом примере покажем, условия устойчивости и асимптотические близости решений возмущенной и невозмущенной задачи. Во втором примере, что коэффициент пропорциональности определяют типы возмущений. Третьем примере, исследуем решение дифференциальных уравнений имеющая регулярные и сингулярные возмущение. Приводим примеры.

Задача однородная, исследование ведется в действительной области.

Цель исследования. В работе рассматриваются начальная задача Коши в регулярной области. Цель исследования — показать асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим

$$\varepsilon \times \frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} = a(t)y(t,\varepsilon) \tag{1}$$

$$y(t,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

на полуоси $[0,+\infty)$.

Уравнения (1) называется устойчивым (точнее, устойчивым вправо), если его решение ограничено на $[0,+\infty)$.

Решения уравнения (1), (2)

$$y(t,\varepsilon) = y^0\, exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \tag{3}$$

Формально взяв $\varepsilon = 0$ получим невозмущенные уравнения

$$a(t)\overline{y}(t,\varepsilon) = 0. \tag{4}$$

Если $a(t) \neq 0$ имеем решение

$$\overline{y}(t,0) = 0. \tag{5}$$

Нули или полюсы функции $a(t)$ определяют бисингулярность возмущенного уравнения (1). В этих точках появится пограничный слой, способы решения показаны в работе [7]. В общем случае, сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения (1) называется бисингулярной однородным дифференциальным уравнением.

Невозмущенные уравнения алгебраической, поэтому оно не сможет удовлетворить начальному условию (2).

Пусть в области $[0,+\infty)$ решения уравнения (1) является устойчиво вправо. Тогда в окрестности точки t=0 появиться пограничный слой. Толщина пограничного слоя можно определить [7] и оценить используя методы которые изложены в этой работе. Но мы используем иные способы получение оценки [2] которые называются методом регуляризации решений.

Рассматриваемую область, делим следующим образом: $t \in [-\alpha_n(\varepsilon); \alpha_n(\varepsilon)]$, где $\alpha_n(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, и $\varepsilon = o(\alpha_n(\varepsilon))$, $n \in N$, а также $t \in [\alpha_n(\varepsilon), +\infty)$ — которую можно называть устойчивой или регулярной областью [7].

Если рассмотрим область $t \in [\alpha_n(\varepsilon), +\infty)$, то выполняются условия устойчивости вправо, поэтому решения задачи (1), (2) стремится к нулю по порядке ε:

$$|y(t,\varepsilon)| \le \left| y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} a(s)ds \right) \right|, \tag{6}$$

где $t_0 = 0$.

Выполняется предельный переход или решение (6) стремится к равенству (5)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |y(t,\varepsilon)| = \overline{y}(t,0),\ t \in [\alpha_n(\varepsilon), +\infty).$$

В пограничном области $t \in [-\alpha_n(\varepsilon), \alpha_n(\varepsilon)]$, $n \in N$ решения (1), (2) применим метод регуляризации, которые отличаются от метода, которые использованы в работе [7]. Для этого составим функционал

$$(y(t,\varepsilon), \varphi(t)) = \int_{-\alpha_n(\varepsilon)}^{\alpha_n(\varepsilon)} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} a(s)ds \right) \times \varphi(s)ds \tag{7}$$

Здесь функция $\varphi(t)$ — финитная функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} exp\left(-\dfrac{\alpha_n^2(\varepsilon)}{\alpha_n^2(\varepsilon) - t^2} \right), t \in [-\alpha_n(\varepsilon), \alpha_n(\varepsilon)], \\ 0, t \notin [-\alpha_n(\varepsilon), \alpha_n(\varepsilon)]. \end{cases}$$

Из (7) по модулю

$$|(y(t,\varepsilon), \varphi(t))| = \left| \int_{t_0}^{t} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) \times \varphi(\tau)d\tau \right| = \int_{-\alpha_n(\varepsilon)}^{\alpha_n(\varepsilon)} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Re \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) \times \varphi(\tau)d\tau.$$

К последнему равенству применим теорема о среднем [8]

$$|(y(t,\varepsilon), \varphi(t))| = \left| \int_{t_0}^{t} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) \times \varphi(\tau)d\tau \right| = \varphi(0) \int_{-\alpha_n(\varepsilon)}^{\alpha_n(\varepsilon)} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Re \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) d\tau.$$

Учитывая, что в области $t \in [-\alpha_n(\varepsilon), \alpha_n(\varepsilon)]$, функция $-\alpha_n(\varepsilon) \le Re \int_{t_0}^{t} a(s)ds \le \alpha_n(\varepsilon)$ тогда

$$\left|(y(t,\varepsilon), \varphi(t))\right| = \left| \int_{t_0}^{t} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) \times \varphi(\tau)d\tau \right| = \varphi(0) \int_{-\alpha_n(\varepsilon)}^{\alpha_n(\varepsilon)} exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Re \int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) d\tau \le$$
$$\le \varphi(0) \int_{-\alpha_n(\varepsilon)}^{\alpha_n(\varepsilon)} d\tau = 2\alpha_n(\varepsilon)\varphi(0).$$

Получим оценку

$$|y(t,\varepsilon)| \le \tilde{C}\alpha_n(\varepsilon) \tag{8}$$

где $\tilde{C}$ — постоянные числа, $\alpha_n(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon = o(\alpha_n(\varepsilon))$, $n \in N$.

Из (6), (8) видно для решения (3) имеет место оценка

$$|y(t,\varepsilon)| = \begin{cases} C\varepsilon, t \in [\alpha_n(\varepsilon), +\infty), \\ \tilde{C}\alpha_n(\varepsilon), t \in [-\alpha_n(\varepsilon), \alpha_n(\varepsilon)]. \end{cases} \tag{9}$$

Близость решений возмущенной и невозмущенной задачи зависит от пограничного слоя. Из (9) видно, что выполняется предельный переход решений (1), (2) и (4).

Рассмотрим примеры. 1) Пусть $a(t) = -t$, функция неустойчиво в интервале $t \in (-\infty, 0)$, устойчива $t \in (0, +\infty)$, $t = 0$— точки перехода от неустойчивой к устойчивому интервалу. В качестве начальной точку возьмем $t=0$ тогда решения задачи (1), (2) рассматривается в области $t \in [0;+\infty)$. Решения задачи (1), (2) устойчиво вправо в рассматриваемой области. Из (3) имеем

$$y(t,\varepsilon) = y^0\,exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(-s)ds\right) = y^0\,exp\left(-\frac{t^2}{2\varepsilon}\right). \tag{10}$$

В области $t \in [\sqrt{\varepsilon},+\infty)$ имеем оценку

$$|y(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon. \tag{11}$$

Если $t \in [-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon}]$, то имеет место оценка

$$|y(t,\varepsilon)| \le \tilde{C}\sqrt{\varepsilon}. \tag{12}$$

Учитывая полученные оценки (11), (12) для решения (10) получим оценку

$$|y(t,\varepsilon)| = \begin{cases} C\varepsilon, t \in [\sqrt{\varepsilon},+\infty), \\ \tilde{C}\sqrt{\varepsilon}, t \in [0,\sqrt{\varepsilon}). \end{cases} \tag{13}$$

Из равенстве (13) видно, что предельный переход возмущенной и невозмущенной задачи выполняется в области $t \in [0;+\infty)$.

2) Найти закон изменения яркости света после прохождения через стеклянную пластину, если при прохождении через слой толщиной x_1=2,5 мм яркость света B_1 составила 30 межд. ед. (Рисунок). Лучи падают на поверхность пластины под любым углом, а его изменение отражается на величине коэффициента *k*.

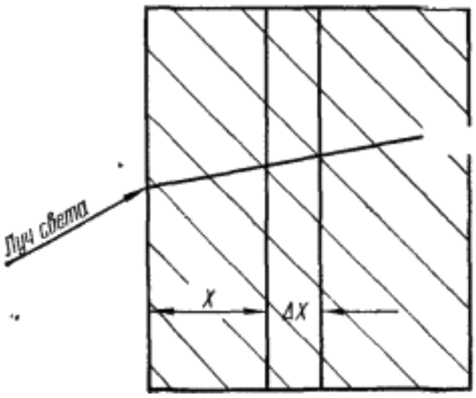

Рисунок.

Решение. Величина яркости света *B*, пропускаемого стеклянной пластиной, изменяется в зависимости от толщины пластины. Часть световой энергии поглощается стеклом, и сила света уменьшается. Так как яркость света зависит от толщины пластины, то силу света *I* будем рассматривать как функцию толщины *x*, т. е. *I=I(x)*. Если при толщине стеклянной пластины *x* мм сила света *I* межд. ед., то при увеличении толщины пластины на величину *Δx* получим уменьшение яркости света.

Пусть сила света на участке *Δx* уменьшается равномерно. Тогда условное уменьшение яркости после прохождения через слой толщиной *Δx* можно определить

$$dI = -kIdx \tag{14}$$

Где *k* — коэффициент пропорциональности, *Δx=dx*. Знак минус указывает на уменьшение яркости с утолщением стеклянной пластины.

Из дифференциального уравнения (14) после разделения переменных находим

$$\frac{dI}{I} = -kdx,$$

Откуда после интегрирования получаем

$$ln\, I = -kx + C. \tag{15}$$

Начальное условие: при x_0=0, I_0=100. Отсюда, согласно уравнению (15),

$$ln\, 1\,00 = -k \times 0 + C,$$

и

$$C = ln\, 1\,00.$$

Подставляя найденное значение C в общее решение (15), получаем

$$ln\, I = -kx + ln\, 1\,00,$$

тогда

$$ln\frac{I}{100} = -kx \tag{16}$$

Дополнительное условие: при x_1=2,5, I_1=30, дает равенство

$$ln\frac{30}{100} = -2{,}5k,$$

Откуда коэффициент пропорциональности

$$k = -\frac{2}{5} ln\, 0\,,3 = 0{,}481. \tag{17}$$

Найденное значение коэффициента пропорциональности (17) подставляем в равенства (16), после чего искомый закон принимает вид

$$ln\frac{I}{100} = -0{,}481x$$

или

$$I = 100e^{-0{,}481x}.$$

Из равенство (16) видно что, коэффициент пропорциональности k зависит от толщины стеклянной пластины т. е. переменной x. Если толщина пластины $0 < x < 3{,}4$, то возмущения будет регулярной, если $3{,}4 \leq x < +\infty$ то возмущения будет сингулярной.

Вышеуказанном примерам видно, что типы возмущений также зависит от коэффициента пропорциональности. В свою очередь коэффициент пропорциональности — это безразмерная величина.

3) Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $\vartheta_0 = 20$ км/час. Течение воды постепенно увеличивается и направляется против направления лодки. Составьте уравнению и исследуйте решению.

Решение. На движущуюся лодку действует сила $F = -k\vartheta$, где k — коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение

$$F = m \times \frac{d\vartheta}{dt}$$

Откуда дифференциальное уравнение движения

$$m \times \frac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta \tag{18}$$

С увеличением течение увеличивается коэффициент пропорциональности. Наивысшие коэффициент пропорциональности соответствует к большим, а наименьшим к медленным течением. В обоих случаях коэффициент пропорциональности не равен нулю или бесконечности.

Здесь масса m — постоянная, но размерная величина. Уравнения (18) является однородным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Начальная условия: при t=0, $\vartheta_0 = 20$ км/час. Если течение воды спокойная или малая то коэффициент пропорциональности k определяет регулярную возмущению. Противном случае с резким увеличением лодки определяет сингулярную возмущению.

Рассмотрим обе случаи. Пусть коэффициент пропорциональности определяет регулярную возмущению. Тогда из уравнения (18), формально взяв k=0 получаем невозмущенную уравнению

$$\frac{d\overline{\vartheta(t)}}{dt} = 0 \tag{19}$$

С начальным условием

$$\vartheta(0) = 20 \text{ км/час.} \tag{20}$$

Решением уравнения (19)

$$\overline{\vartheta(t)} = C + \vartheta_0.$$

В этом случае со временем лодка сохраняет постоянную скорость. Учитывая условие (20)

$$\overline{\vartheta(t)} = 20 \text{ км/час.} \tag{21}$$

Решение (18) с условием (20)

$$\vartheta(t) = 20\, exp\left(-\frac{k}{m}t\right). \tag{22}$$

Предельный переход выполняется

$$\lim_{k\to 0} \vartheta(t) = \overline{\vartheta(t)}. \tag{23}$$

Пусть $0 < k < +\infty$. В этом случае уравнения (18) записываем в виде

$$\varepsilon \times \frac{d\vartheta(t)}{dt} = -\frac{\vartheta(t)}{m} \tag{24}$$

где $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Формально взяв, $\varepsilon = 0$ имеем невозмущенную уравнению

$$\bar{\vartheta}(t) = 0. \tag{25}$$

Уравнения (25) является алгебраическим и не удовлетворяет начальному условию (20).

Основная задача показать асимптотическую близости решений сингулярно возмущенной и невозмущенной задачи, т. е. предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \vartheta(t) = \overline{\vartheta(t)}. \tag{26}$$

$$\vartheta(t) = 20\, exp\left(-\frac{1}{m\varepsilon}t\right). \tag{27}$$

Предельный переход решений (18) и (25) выполняется и решения устойчиво вправо. Поэтому верна оценка (9) в области $t \in [0, +\infty)$.

Результаты и обсуждение

Показано асимптотические близости решений возмущенной и невозмущенной задач. Приведены несколько примеров. Каждый из них иллюстрирует определенные особенности возмущений. Например, в первом примере конкретном значении функции *a(t)* сущность возмущенной задачи. Во втором примере показано, что в качестве малого параметра можно взять коэффициент пропорциональности. Последнем примере рассмотрено задача приводящие к устойчивости. Заметим, что устойчивость вправо одним из частных случаи биустойчивости.

Показаны методы получения оценки решений возмущенной задачи. Этот метод называется методом регуляризации решений.

Вывод

Задача однородная, поэтому исследования проводились в действительной области. Оценка пограничного слоя получилась с помощью метода регуляризации решений [2]. Новизна статьи — это применение метода регуляризации к пограничного слоя и приведенные прикладные примеры.

Список литературы:

1. Акматов А. А. Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01

2. Акматов А. А. Асимптотика решений однородного бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения в теории обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. No2. С. 18-25. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02

3. Акматов А. А. Комплекстик тегиздикте френель интегралдарынын асимптотикалык ажыралмасы // Вестник ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_19

4. Акматов А. А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө // Вестник ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_26

5. Барбашин Е. А. О построении функций Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. №12. С. 2127-2158.

6. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. № 1. С. 61-70. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_61

7. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями: Дисс. … д-р физ.-мат. наук. Жалал-Абад. 2017. С. 180-280.

8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 2016. С. 120-126.

References:

1. Akmatov, A. (2022). The Regularization Method of Solutions a Bisingularly Perturbed Problem in the Generalized Functions Space. *Bulletin of Science and Practice, 8*(2), 10-17. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/01
2. Akmatov, A. (2022). Solutions Asymptotics of a Homogeneous Bisingularly Perturbed Differential Equation in the Generalized Functions Theory. *Bulletin of Science and Practice, 8*(2), 18-25. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02
3. Akmatov, A. A. (2021). Komplekstik tegizdikte frenel' integraldarynyn asimptotikalyk azhyralmasy. *Vestnik oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Kyrgyz). https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_19
4. Akmatov, A. A. (2021). Singulyardyk kozgolgon maselenin chechimin izildɵɵ, *Vestnik oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. (in Kyrgyz). https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_26
5. Barbashin, E. A. (1968). O postroenii funktsii Lyapunova. *Differentsial'nye uravneniya, 4*(12), 2127-2158.
6. Karimov S., & Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii, kogda sobstvennye znacheniya matritsy imeyut mnimye chasti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Kyrgyz). https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_61
7. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami: Diss. … d-r fiz.-mat. nauk. Zhalal-Abad. 180-280. (in Kyrgyz).
8. Fikhtengolts, G. M. (2016). Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Moscow, 120-126. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 13.11.2022 г.

Принята к публикации 20.11.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А., Шакиров К. К., Камбарова А. Д. Задачи, приводящие к возмущениям // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №12. С. 28-35. https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/03

Cite as (APA):

Akmatov, A., Shakirov, K., & Kambarova, A. (2022). Problems Leading to Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(12), 28-35. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/03