УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/01

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

*©**Акматов А. А.**, SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Токторбаев А. М.**, SPIN-код 8216-4750, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, ain7@list.ru*
*©**Шакиров К. К.**, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kylychbek.shakirov@inbox.ru*

BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR PROBLEM WITH A CHANGE IN STABILITY

*©**Akmatov A.**, SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Toktorbaev A.**, SPIN-code 8216-4750, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, ain7@list.ru*
*©**Shakirov K.**, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kylychbek.shakirov@inbox.ru*

Аннотация. Если функция, определяющая устойчивый и неустойчивый интервал, несколько раз меняет условия устойчивости, то они хорошо изучены. Но при условии, что начальная точка и точка смены устойчивости не совпадают. Поэтому в данной работе мы изучаем решения нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Особенность и новизна данной работы заключается в том, что здесь рассматриваемая область несколько раз меняет условия устойчивости. А также область имеет бесконечно большое время задержки. Для доказательства существования решений используется метод последовательных приближений. А также для сходимости решений применим метод мажорант. Для доказательства единственности решений воспользуемся методом от противного. Решение поставленной задачи рассматривается в действительной области. В результате была доказана асимптотическая близость решения возмущенной и невозмущенной задач.

Abstract. If the function that determines the stable and unstable interval changes the stability conditions several times, then they are well studied. But under the condition the initial point and the point of change of stability do not coincide. Therefore, in this paper, we study solutions of nonlinear singularly perturbed differential equations with initial conditions. The peculiarity and novelty of this work lies in the fact that here the considered area changes the stability conditions several times. And also, the area has an infinitely long delay time. To prove the existence of solutions, the method of successive approximations is used. And also, for the convergence of solutions, we apply the majorant method. To prove the uniqueness of solutions, we use the contradiction method. The solution of the stated problem is considered in the real area.

Ключевые слова: устойчивость, метод от противного, метод мажорант, сингулярное возмущение, дифференциальные уравнения, асимптотика.

Keywords: stability, contradiction method, majorant method, singular perturbation, differential equations, asymptotic.

Введение

Если функция $a(t)$ несколько раз меняет условия устойчивости, то можно выбрать начальную точку из устойчивого интервала. Сложность заключается в том, что точки смены устойчивости, начальная точка, а также критическая точка совпадают. В этом случае мы должны рассматривать несколько областей. А это, свою очередь, добавляют некоторые сложности. Когда точки смены устойчивости, начальная точка, а также критическая точка не совпадают, то эти случаи рассмотрены в [1, 2]. Задача нелинейная, поэтому функцию $g(t, y(t,\varepsilon))$ разложим в окрестности точки $x = 0$ в ряд Тейлора. Для простоты ограничиваем нелинейности второго порядка, хотя можно определить нелинейности любого порядка.

Ставим определенное условие на действительную часть функции $a(t)$. Определить область можно будет с достаточно большой время задержкой. Если $a(t) = \pm i\beta(t)$. то в действительной области неопределенны устойчивые и неустойчивые интервалы [3-6]. Этот случай критический. *Цель исследования.* Доказать асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задач.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = a(t)y(t,\varepsilon) + f(t, y(t,\varepsilon)) + \varepsilon g(t, y(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0 \tag{2}$$

где $\left|y^0\right| = O(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ — малый параметр, $y(t,\varepsilon)$ - искомая функция, $t \in \Omega$, $[t_0, T]$ — отрезок действительной оси, $t_0 < T$. Определим область

$$\Omega^2 = \{(t, y) | t \in [t_0, T], |y| \le \delta\},$$

где $0 < \delta$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε .

Задача. Доказать существование, ограниченность и единственность решения $y(t,\varepsilon)$ на промежутке $[t_0, T]$.

От правых частей (1) потребуем выполнения следующих условий:

ϑ_1: $\operatorname{Re} a(t) < 0$ при $t_0 \le t < T_0$, $\operatorname{Re} a(t) > 0$ при $T_0 < t \le T$, $\operatorname{Re} a(T_0) = 0$.

ϑ_2: $F(t) = \operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} a(s)ds$, $\forall t \in [t_0, T]$, $F(t) < 0$, $F(t_0) = F(T) = 0$, $F(T_0) = \operatorname{Re} a(T_0)$.

ϑ_3: $g(t, y(t,\varepsilon)) \equiv 0$, $\forall (t, y) \in \Omega^2$, $f(t, y(t,\varepsilon)) \equiv 0$; $\left|f(t,\tilde{y}) - f(t,\tilde{\tilde{y}})\right| \le M_0 \left|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\right| \times$ $\times \max\{|\tilde{x}|, |\tilde{\tilde{x}}|\}$, где $0 < M_0$ — некоторая постоянная, не зависящая от ε .

Учитывая условие ϑ_3, функцию $g(t,y)$ разложим в окрестности точки $y=0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$g(t,y)=g(t,0)+\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}y+\ldots+\frac{\partial^{(n+1)}g(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}y^{n+1},\text{ где } 0<\theta<1.$$

Тогда получим

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=a(t)y(t,\varepsilon)+f(t,y(t,\varepsilon))+\varepsilon\left[g(t,0)+\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial^{(n+1)}(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}y^{n+1}\right].$$

По условию ϑ_3 имеем $g(t,0)\equiv 0$. Введя следующие обозначения

$$\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}=g_0(t),\ \ldots,\ \frac{\partial^{(n+1)}g(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}=g_{n+1}(t,y).$$

Имеем,

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=(a(t)+\varepsilon g_0(t))y(t,\varepsilon)+f(t,y(t,\varepsilon))+\ldots+\varepsilon g_{n+1}(t,y(t,\varepsilon)) \tag{3}$$

$$y(T,\varepsilon)=y^0,\ \left|y^0\right|=C_0\varepsilon. \tag{4}$$

Докажем следующую лемму:

Лемма. Пусть выполняется ϑ_3. Тогда

$$\forall\left((t,\tilde{y})\wedge\left(t,\tilde{\tilde{y}}\right)\in\Omega^2\right):\ \left|g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\right|\le M\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right|\max\left\{\left|\tilde{y}\right|,\left|\tilde{\tilde{y}}\right|\right\},$$

где $0<M$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Возьмем разность $g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}$. Этот разность преобразуем следующим образом:

$$g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}+g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}=g_{n+1}(t,\tilde{y})\left(\tilde{y}^{n+1}-\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\right)+$$
$$+\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\left(g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\right).$$

К разности $g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})$ можно применить теорему о конечных приращениях по переменной y.

Функции $g_{n+1}(t,y)$, $\dfrac{\partial g_{n+1}(t,\tilde{y}+\theta_1(\tilde{\tilde{y}}-\tilde{y})}{\partial y}$ непрерывны в области Ω^2, следовательно, они ограничены.

Учитывая, все сказанное имеем:

$$\left|g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\right|\le M\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right|\max\left\{\left|\tilde{y}\right|,\left|\tilde{\tilde{y}}\right|\right\}.$$

Лемма доказано.

При $\varepsilon=0$ согласно ϑ_3 невозмущенное уравнение $a(t)\bar{y}(t)+f(t,\bar{y}(t))=0$ имеет решение $y(t)=0$, которое для присоединенного уравнения будет точки покоя. Точка покоя неустойчива при $t\in[t_0,T_0)$ и устойчива при $t\in(T_0,T]$.

Имеет место следующая теорема.

 Т. 8. №7. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/80

Теорема. Пусть выполнены условия ϑ_1 - ϑ_3. Тогда $\forall t \in [t_0, T]$ решение задачи (3)-(4) существует, единственно и для нее справедлива оценка

$$|y(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| q_0 \tag{5}$$

где $1 < q_0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

Доказательство. Задачи (3)-(4) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением:

$$y(t,\varepsilon) = y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}[f(\tau,y)+\varepsilon g_{n+1}(\tau,y)]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right)d\tau \tag{6}$$

где $F(s) = a(s) + \varepsilon g_0(s)$.

Для доказательства существования решения уравнения (6) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$y_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$y_m(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}[f(\tau,y_{m-1})+\varepsilon g_{n+1}(\tau,y_{m-1})]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)d\tau \tag{7}$$

Проведем оценку последовательных приближений (7).

$$y_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$y_1(t,\varepsilon) = y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right),$$

$$|y_1(t,\varepsilon)| = C_0\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right).$$

$$|y_m(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right)M\left[|y_{m-1}|^{n+1} + \varepsilon|y_{m-1}|^{n+1}\right]d\tau.$$

где $F(s) = a(s) + \varepsilon g_0(s)$. При $m = 2$, $n = 1$ имеем

$$|y_2(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right)M\left[|y_1|^2 + \varepsilon|y_1|^2\right]d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|y_1(\tau,\varepsilon)|^2 \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t} C_0^2\varepsilon^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right)d\tau =$$

$$= |y_1(t,\varepsilon)| + MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| \times \big(1 + C_0 M \times$$

$$\times (1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right)d\tau.$$

Тогда получим

$$|y_2(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|\left(1 + C_0 M(1+\varepsilon)M_0\varepsilon\right).$$

Верно оценка

$$|y_2(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| q_0 .$$

При $m = 3$, $n = 1$ справедлива следующая оценка

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right) M\left[|y_2|^2 + \varepsilon|y_2|^2\right] d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} |y_2(\tau,\varepsilon)|^2 \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right) d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t} |y_1|^2 q_0^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau =$$

$$= |y_1(t,\varepsilon)| + MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon q_0^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| \times \left(1 + C_0 M \times\right.$$

$$\left.\times q_0^2 (1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau\right.$$

К последнему интегралу применяя лемму, получим

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|\left(1 + C_0 M(1+\varepsilon) q_0^2 M_0 \varepsilon\right).$$

Получается оценка

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| q_0 .$$

Пусть имеет место оценка

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \|y_1(t,\varepsilon)\| q_0 \qquad (8)$$

Учитывая (8), докажем справедливость оценки для $(m+1)$.

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right) M\left[|y_m|^2 + \varepsilon|y_m|^2\right] d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} |y_m(\tau,\varepsilon)|^2 \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t} F(s)ds\right) d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t} |y_1|^2 q_0^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau =$$

$$= |y_1(t,\varepsilon)| + MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon q_0^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| \times \left(1 + C_0 M \times\right.$$

$$\left.\times q_0^2 (1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds\right) d\tau = |y_1(t,\varepsilon)|\left(1 + C_0 M(1+\varepsilon_0) q_0^2 M_0 \varepsilon\right)\right..$$

Так как $1 + C_0 M(1+\varepsilon_0) M_0 \varepsilon q_0^2 \le q_0$, следовательно, $|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| q_0$. Таким образом, оценка (8) верна $\forall m \in N$. Из (8) вытекает, что $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ ограничена.

Теперь докажем сходимости последовательных приближений $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, применяя метод мажорант. Для этого последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ представим в виде:

$$y_m(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \left(y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)\right) + \left(y_3(t,\varepsilon) - y_2(t,\varepsilon)\right) + \ldots + \left(y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)\right).$$

Оценим $\left\| y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon) \right\|$. Имеем

$$\left| y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon) \right| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right)\left| y_{m-1}(\tau,\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - y_{m-2}(\tau,\varepsilon) \right| \max\left\{ \left| y_{m-1}(\tau,\varepsilon) \right|, \left| y_{m-2}(\tau,\varepsilon) \right| \right\} d\tau .$$

Учитывая (8), имеем $\max\left\{ \left| y_{m-1}(t,\varepsilon) \right|, \left| y_{m-2}(t,\varepsilon) \right| \right\} = \left| y_1(t,\varepsilon) \right| q_0$.

Тогда получим

$$\left| y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon) \right| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right)\left\| y_{m-1} - y_{m-2} \right\| \left| y_1 \right| q_0 d\tau.$$

При $m = 2$,

$$\left| y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon) \right| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right)\left| y_1 \right| \times \left| y_1 \right| q_0 d\tau =$$

$$= \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)C_0^2\varepsilon^2 q_0^2 \le \int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right) d\tau \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| MM_0C_0\varepsilon q_0^2(1+\varepsilon_0) .$$

Пусть

$$\left| y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon) \right| \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| q_1, \text{ где } q_1 = MM_0C_0\varepsilon q_0^2(1+\varepsilon_0) .$$

Пусть

$$\left| y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon) \right| \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| q_1^{m-1} \tag{9}$$

Докажем, справедливость оценки (9) для $(m+1)$.

$$\left| y_{m+1}(t,\varepsilon) - y_m(t,\varepsilon) \right| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\left| y_m - y_{m-1} \right| \times \left| y_1 \right| q_0 d\tau \le$$

$$\le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right)\left| y_1 \right| q_1^{m-1}\left| y_1 \right| q_0 d\tau = M(1+\varepsilon)q_0 q_1^{m-1} C_0^2 \varepsilon \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} F(s)ds \right) \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau} F(s)ds \right) d\tau \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| q_1^m .$$

Оценка (9) верна $\forall m \in N$. Таким образом

$$\left| y_1(t,\varepsilon) + y_2(t,\varepsilon) + \ldots + y_m(t,\varepsilon) + \ldots \right| \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| + \left| y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon) \right| + \left| y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon) \right| + \ldots \le \tag{10}$$

$$\le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_1^k \right) = \left| y_1(t,\varepsilon) \right| \times \frac{1}{1-q_1}$$

Из (10) следует, что последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, $\forall t \in [t_0, T]$ и при $0 < q_1 < 1$ сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1) и для нее справедлива оценка $\left| y(t,\varepsilon) \right| \le \left| y_1(t,\varepsilon) \right| q_0$. Оценка (5) доказана. Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что существует другое решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (3)-(4).

$$x(t,\varepsilon):\ x(t,\varepsilon)=y^{0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[f(\tau,y)-\varepsilon g(\tau,y)]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)d\tau\,.$$

Учитывая (7), получим

$$|y_m-x|\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[(f(\tau,y_{m-1})-f(\tau,y))+\varepsilon(g_{n+1}(\tau,y_{m-1})-g_{n+1}(\tau,y))]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau \qquad (11)$$

Далее, учитывая (11)

$$|y_1-x|\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)[f(\tau,y)+\varepsilon g_{n+1}(\tau,y)]d\tau\le\frac{M_0}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)\times|x|^2d\tau\le$$

$$\le M_0C_0(1+\varepsilon)q_0^2|y_1(t,\varepsilon)|(t-t_0),$$

Предположим, что:

$$|y_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|\frac{M_0^mC_0^m(1+\varepsilon)^m q_0^{m+1}(t-t_0)^m}{m!} \qquad (12)$$

Докажем оценку (12)

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|\frac{M_0^{m+1}C_0^{m+1}(1+\varepsilon)^{m+1}q_0^{m+2}(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!},\dots.$$

Тогда $\forall m\in N$ верна (12). Отсюда вытекает $\|y(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\|\le 0 \ \Rightarrow\ y(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)$. Единственность решения доказана. Теорема полностью доказано.

Пример. Пусть $a(t)=\lambda_3(t)=t^3-t+i(2t^2-1)$. Действительная часть отрицательна в интервалах $t\in(-\infty;-1)\cup(0,1)$ — то это устойчивый интервал, при $t\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$ — неустойчивый интервал, а $t=\pm1$ — точки перехода от устойчивого к неустойчивому интервалу, $t=0$ — точка перехода от неустойчивого к устойчивому интервалу. Действительная часть характеристической функции равна $\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}a(s)ds=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}$.

Отсюда имеем: $t_1=-\sqrt{2}$, $t_2=t_3=0$, $t_4=\sqrt{2}$. При $t\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$ — сингулярная область, а при $t\in(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$ — регулярная область. Если за начальную точку возьмем $t=-\sqrt{2}$, то точка $t=0$ одновременно является и точкой смены устойчивости, и начальной и критической. Поэтому начальную точку выберем иначе, с дополнительным условиям. Если $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$, имеем действительные корни, $t\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$, уравнения имеет две действительные две комплексные корни. Появиться возможность с максимальной время задержкой. Если начальную точку выберем от бесконечности. т. е. $y(-\infty,\varepsilon)=y_0$, то имеем [7] сингулярную задачу.

Результаты и обсуждения

Если взять начальную точку бесконечно удаленную точку, то по определению [7] также имеем сингулярную задачу. Такой случай вполне возможен в данной работе. Можем сказать, что последовательность $\{y_m(t,\varepsilon\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$,

Т. 8. №7. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/80

являющейся решением уравнения (3). Когда время задержка бесконечно большая, то задача рассматривается на всей числовой оси, т. е. вся числовая прямая представляет собой регулярной областью. Точнее, нет необходимости изучать сингулярную область.

Пограничные слои появится бесконечно удаленной точке. Время задержка достаточно большая. Бесконечно удаленная точка не представляет интереса для изучения пограничных явлений. В приведенном выше примере функция $a(t)$ трижды меняет условия устойчивости. В общем случае такая функция может несколько раз меняет условия устойчивости.

Выводы

Решение (3), (4) зависят от выбора $a(t)$. Если в качестве начальной точки выбрана точка на бесконечности, то такая задача является сингулярной[7]. Доказанная теорема показывает, что асимптотическая близость решений возмущенной и невозмущенной задач.

Список литературы:

1. Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 15-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01
2. Акматов А. А. Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 24-31. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02
3. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.
4. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. No1. С. 61-70.
5. Акматов А. А., Замирбек К. Н., Шакиров К. К. Применение метода возмущений в теории оптики // Вестник Жалал-Абадского государственного университета 2021. №3(48). С. 205-210.
6. Каримов С., Акматов А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Естественные и технические науки. 2006. No1. С. 14.
7. Шаталов Ю. С. Об одном методе исследования сингулярных задач // Дифференциальные уравнения // Наука и техника. 1968. Т. 4. С. 2215-2229.

References:

1. Akmatov, A. (2022). Investigation of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 15-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01
2. Akmatov, A. (2022). Asymptotics of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 24-31. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02
3. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian).
4. Karimov S., & Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).

5. Akmatov, A. A., Zamirbek, K. N., & Shakirov, K. K. (2021). Primenenie metoda vozmushchenii v teorii optiki. *Vestnik Zhalal-Abadskogo gosudarstvennogo universiteta,* (3 (48)), 205-210. (in Russian).

6. Karimov, S., & Akmatov, A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (1), 14. (in Russian).

7. Shatalov, Yu. S. (1968). Ob odnom metode issledovaniya singulyarnykh zadach. *Differentsial'nye uravneniya. Nauka i tekhnika, 4*, 2215-2229. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 18.06.2022 г.

Принята к публикации 23.06.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А., Токторбаев А. М., Шакиров К. К. Поведение решения нелинейной задачи в случае смены устойчивости // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №7. С. 12-20. https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/01

Cite as (APA):

Akmatov, A., Toktorbaev, A., & Shakirov, K. (2022). Behavior of the Solution of a Nonlinear Problem with a Change in Stability. *Bulletin of Science and Practice, 8*(7), 12-20. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/01