УДК 517.928
MSC 2020: 34D15; 12H25
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/04

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

*©**Акматов А. А.,** SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Токторбаев А. М.,** SPIN-код 8216-4750, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, ain7@list.ru*
*©**Замирбек кызы Н.,** Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, nargiza.z_9292@bk.ru*

APPLIED PROBLEMS OF PERTURBATION THEORY

*©**Akmatov A.,** SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
*©**Toktorbaev A.,** SPIN-code: 8216-4750, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, ain7@list.ru*
*©**Zamirbek kyzy N.,** Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, nargiza.z_9292@bk.ru*

Аннотация. В работе исследуется решения нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Приоритетной задачей является доказать асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи на действительной оси. Но не всегда это получается. Впервые в работах в данном направлении введено понятие биустойчивости решений. Дано определение устойчивости направо и налево. А также определения биустойчивости решений. Приведены примеры. Если решения биустойчивы, то всегда можно показать асимптотическую близость решений возмущенной и невозмущенной задачи на действительной области.

Abstract. In this paper, we study solutions to nonlinear singularly perturbed differential equations with initial conditions. Proving the asymptotic closeness of the solutions of the perturbed and unperturbed problems on the real axis is a top-priority task. But it doesn't always work out. For the first time in works in this direction, the concept of bistability of solutions was introduced. The definition of stability to the right and to the left is given. As well as definitions of bistability of solutions. Examples are given. If the solution is bistable, then it is always possible to show the asymptotic closeness of the solutions of the perturbed and unperturbed problems on the real domain.

Ключевые слова: биустойчивость, метод противного, метод мажорант, решения, последовательные приближения, дифференциальные уравнения, второй закон Ньютона.

Keywords: bistability, contradiction method, majorant method, solutions, successive approximations, differential equations, Newton’s second law.

Введение

Пусть $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, тогда определяются устойчивые и неустойчивые интервалы относительно действительной области [1, 5]. Если действительная часть $\alpha(t) \equiv 0$, то это относится к критическому случаю [3]. Функция $u(t) = Re\int_{t_0}^{t} a(s)ds \geq 0$ на отрезке $[t_0, T]$, этот отрезок сужаем до окрестности одной точки. Известно, что там появятся пограничные области [4].

Рассмотрим примеры, приводящие к сингулярно возмущенным задачам. Решения задачи исследуем, применяя методы возмущений, которые изложены в данной статье.

Заметим, что *a(t)* состоят из чисто мнимых частей. Тогда невозможно определить устойчивые и неустойчивые интервалы. Должны переходить к комплексной области и применить метод линии уровня [1].

Цель исследования. Доказать асимптотическую близость решений возмущенных и невозмущенных задач. А также определить природу биустойчивости решений [2].

Понятие биустойчивости и задача приводящая к этим возмущениям раньше не рассматривалась в работах [1, 3–5].

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = a(t)y(t,\varepsilon) + f(t, y(t,\varepsilon)) + \varepsilon g(t, y(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $|y^0| = O(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ — малый параметр, $y(t,\varepsilon)$ — искомая функция, $t \in \Omega$, $[0,\infty)$ действительной полуоси. Определим область $\Omega^2 = \{(t,y)|t \in [0,\infty), |y| \leq \delta\}$ где $0 < \delta$ некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Определение 1. Если $u(t) = Re\int_0^t a(s)ds \leq 0$, тогда на полуоси $[0,+\infty)$ решения однородной части уравнения (1) устойчиво вправо, в противном случае влево.

Определение 2. Если решения однородной части уравнения (1) одновременно устойчиво вправо и влево, то оно биустойчиво.

Задача. Доказать существование, ограниченность и единственность решения $y(t,\varepsilon)$ на промежутке $[0,\infty)$.

Для решения поставленной задачи от правых частей (1) потребуем выполнения следующих условий:

ϑ_1: $Re\, a\,(t) > 0$ при $-\infty < t < 0$, $Re\, a\,(t) < 0$ при $0 < t < \infty$, $Re\, a\,(0) = 0$.

ϑ_2: $F(t) = Re\int_0^t a(s)ds$, $\forall t \in [0,\infty)$, $F(t) < 0$, $F(0) = 0$.

ϑ_3: $g(t, y(t,\varepsilon)) \equiv 0$, $\forall (t,y) \in \Omega^2$, $f(t, y(t,\varepsilon)) \equiv 0$; $|f(t,\tilde{y}) - f(t,\tilde{\tilde{y}})| \leq M_0|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}| \times$
$\times\, max\{|\tilde{x}|, |\tilde{\tilde{x}}|\}$, где $0 < M_0$ — некоторая постоянная, не зависящая от ε. Из [1] имеем:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = (a(t) + \varepsilon g_0(t))y(t,\varepsilon) + f(t, y(t,\varepsilon)) + \varepsilon g_1(t, y(t,\varepsilon)), \tag{3}$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, |y^0| = C_0\varepsilon. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ согласно ϑ_3 невозмущенное уравнение $a(t)\overline{y}(t) + f(t, \overline{y}(t)) = 0$, имеет решение $y(t) = 0$. Справедлива теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия ϑ_1- ϑ_3. Тогда $\forall t \in [0,+\infty)$ решение задачи (3), (4) существует, единственно и для нее справедлива оценка

$$|y(t,\varepsilon)| \leq |y_1(t,\varepsilon)|q_0 \tag{5}$$

где $1 < q_0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

Доказательство. Задачи (3), (4) заменим:

 Т. 8. №12. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/85

$$y(t,\varepsilon) = y^0 \, exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_T^t F(s)ds\right) - \int_T^t [f(\tau,y) + \varepsilon g_1(\tau,y)]\, exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau F(s)ds\right)d\tau \qquad (6)$$

где $F(s) = a(s) + \varepsilon g_0(s)$.

Для доказательства существования решения уравнения (6) применим метод последовательных приближений:

$y_0(t,\varepsilon) \equiv 0,$

$$y_m(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) - \int_T^t [f(\tau,y_{m-1}) + \varepsilon g_1(\tau,y_{m-1})]\, exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau F(s)ds\right)d\tau. \qquad (7)$$

Проведем оценку последовательных приближений (7).

$y_0(t,\varepsilon) \equiv 0$, $|y_1(t,\varepsilon)| = C_0\varepsilon\, exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon} Re \int_T^t F(s)ds\right)$.

$|y_m(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| - \tfrac{1}{\varepsilon}\int_T^t exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon} Re\int_t^\tau F(s)ds\right) M[|y_{m-1}|^2 + \varepsilon|y_{m-1}|^2]d\tau,$

где $F(s) = a(s) + \varepsilon g_0(s)$. Тогда получим $|y_2(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|(1 + C_0M(1+\varepsilon)M_0\varepsilon)$. Верно оценка $|y_2(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0$. Пусть имеет место оценка

$$|y_m(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0 \qquad (8)$$

Учитывая (8), докажем справедливость оценки для $(m+1)$.

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Re\int_\tau^t F(s)ds\right) M[|y_m|^2 + \varepsilon|y_m|^2]d\tau = |y_1(t,\varepsilon)|(1 + C_0M(1+\varepsilon_0)q_0^2M_0\varepsilon)$$

Так как $1 + C_0M(1+\varepsilon_0)M_0\varepsilon q_0^2 \le q_0$, следовательно $|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0$. Таким образом, оценка (8) верна $\forall m \in N$. В итоге $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ ограничена.

Докажем сходимости $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, применяя метод мажорант:

$$y_m(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + (y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)) + (y_3(t,\varepsilon) - y_2(t,\varepsilon)) + \ldots + (y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)).$$

Имеем $|y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_1$, где $q_1 = MM_0C_0\varepsilon q_0^2(1+\varepsilon_0)$. Пусть

$$|y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_1^{m-1}. \qquad (9)$$

Докажем, справедливость оценки (9) для $(m+1)$.

$$|y_{m+1} - y_m| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\, exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Re\int_{t_0}^t F(s)ds\right)\int_{t_0}^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Re\int_{t_0}^t F(s)ds\right)|y_m - y_{m-1}| \times |y_1|q_0 d\tau \le |y_1(t,\varepsilon)|q_1^m$$

Оценка (9) верна $\forall m \in N$. Таким образом

$$|y_1 + y_2 + \ldots + y_m + \ldots| \le |y_1| + |y_2 - y_1| + |y_m - y_{m-1}| + \ldots \le |y_1|\left(1 + \sum_{k=1}^\infty q_1^k\right) = |y_1| \times \frac{1}{1-q_1}. \qquad (10)$$

Из (10) следует, что последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, $\forall t \in [t_0, T]$ и при $0 < q_1 < 1$ сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (3) и для нее справедлива оценка $|y(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0$. Оценка (5) доказана.

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим

$x(t,\varepsilon)$: $x(t,\varepsilon) = y^0\, exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t F(s)ds\right) + \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t [f(\tau,y) - \varepsilon g(\tau,y)]\, exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t F(s)ds\right)d\tau.$

Учитывая (7), получим

$$|y_m - x| \le \tfrac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t [(f(\tau,y_{m-1}) - f(\tau,y)) + \varepsilon(g_{n+1}(\tau,y_{m-1}) - g_{n+1}(\tau,y))]\, exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}Re\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau. \qquad (11)$$

Предположим, что:

$$|y_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| \frac{M_0^m C_0^m (1+\varepsilon)^m q_0^{m+1}(t-t_0)^m}{m!} \qquad (12)$$

Докажем оценку (12) $|y_{m+1}(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| \frac{M_0^{m+1} C_0^{m+1}(1+\varepsilon)^{m+1} q_0^{m+2}(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!},\ldots$

Тогда $\forall m \in N$ верна (12). Отсюда вытекает $\|y(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\| \le 0 \Rightarrow y(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)$. Единственность решения доказана. Теорема полностью доказана.

Пример №1. Пусть $a(t)=-t$, $t\in(-\infty,+\infty)$, $t_0=0$. Условия $\vartheta_1-\vartheta_3$ выполняются $(-\infty,0)$ — интервал неустойчивости, $(0,+\infty)$ — интервал устойчивости. Мы можем задать начальную задачу в одной точке. Эта точка одновременно является начальной точкой и точка перехода от неустойчивой к устойчивой. Область притяжения здесь достаточно велика, поэтому на решение задачи (3), (4) только влияет окрестность начальной точки. Эти окрестности можно выделить следующим образом [4]: $t_0-\sqrt{\varepsilon}\le t_0 \le t_0+\sqrt{\varepsilon}$ — простирающая окрестность точки. Этой окрестности получим следующие оценки $y^0 e^{-\frac{1}{2}} \le y(t,\varepsilon) \le y^0 e^{-\frac{1}{2}}$. Видно, что не выполняется предельный переход решения возмущенной и невозмущенной задачи. Потом выделим следующие области, тогда $t\in\left[t_0+\sqrt{\varepsilon}, t_0+\sqrt{\varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}}\right]$ и $t\in\left[t_0-\sqrt{\varepsilon}, t_0-\sqrt{\varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}}\right]$. Получим оценки регулярной области $y^0 e^{-\frac{1}{2}} \le y(t,\varepsilon) \le y^0\varepsilon$, аналогично оценка к $t\in\left[t_0-\sqrt{\varepsilon}, t_0-\sqrt{\varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}}\right]$.

Отсюда можно сделать вывод, когда выполняются условия биустойчивости, тогда существует регулярная область и не существует сингулярная область. Такое определение введено в работе [4].

Пример №2. Капля с начальной массой *M* г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет *m* г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю. Принять, что коэффициент пропорциональности $k\ne m$.

Решение. Ввиду равномерного испарения капли ее масса в момент *t* равна *M−mt*, а сила тяжести капли *–(M−mt)g* где *g* — ускорение силы тяжести. Силу тяжести считаем положительной, т. е. направленной вниз.

По условию сила сопротивления воздуха $F_1=-k\vartheta$ (знак минус, так как она направлена вверх). Равнодействующая всех сил, приложенных к капле,

$$F=(M-mt)g-k\vartheta,$$

а так как по второму закону Ньютона

$$F=(M-mt)\times\frac{d\vartheta}{dt},$$

то дифференциальное уравнения задачи

$$(M-mt)\times\frac{d\vartheta}{dt}=(M-mt)\times g-k\vartheta,$$

или

$$\frac{d\vartheta}{dt}+\frac{k\vartheta}{(M-mt)}-g=0.$$

Решая это линейное уравнения подстановкой $\vartheta=u\omega$, находим

$$\omega=(M-mt)^{\frac{k}{m}},$$

и

$$u = \int g(M - mt)^{-\frac{k}{m}} dt = \frac{\frac{g}{m}(M - mt)^{-\frac{k}{m}+1}}{\frac{k}{m} - 1} + C.$$

Отсюда

$$\vartheta = u\omega = \frac{g(M - mt)}{k - m} + C(M - mt)^{\frac{k}{m}} \tag{13}$$

Начальное условие: при *t=0*, *ϑ=0*. Следовательно,

$$0 = \frac{gM}{k - m} + CM^{\frac{k}{m}},$$

откуда

$$C = \frac{gMM^{-\frac{k}{m}}}{m - k} = \frac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m - k}$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в равенство (1), и скорость движения капли

$$\vartheta = \frac{g}{m - k} \times \left[-M + mt + \left(1 - \frac{m}{M} t\right)^{\frac{k}{m}} M \right].$$

Отсюда учитывая [6] что, второй замечательный предел равен $\lim\limits_{t\to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$, имеем

$$\lim_{t\to 0}\left(1 - \frac{m}{M} t\right)^{\frac{k}{m}} = \left(\lim_{t\to 0}\left(1 + \left(-\frac{m}{M} t\right)\right)^{-\frac{M}{m}\times\frac{1}{t}} \right)^{-kt} = e^{-kt}.$$

Учитывая равенство, получим

$$\vartheta = \frac{g}{m - k} \times \left[-M + mt + Me^{-kt}\right] \tag{14}$$

Из начального условия видно что $t \in [0, +\infty)$. Коэффициент пропорциональности — это безразмерная величина, поэтому его можно считать бесконечно малыми или бесконечно большими. Если коэффициент пропорциональности принадлежит $0 < \kappa < 1$, то его можно взять в качестве малого параметра ε.

Если коэффициент пропорциональности принадлежит $0 < \kappa < 1$, то возмущение будет регулярным. Покажем предельный переход. Пусть $\varepsilon = k$, $\varepsilon = 0$, тогда невозмущенное уравнение примет вид

$$\frac{d\bar{\vartheta}(t)}{dt} = g, \tag{15}$$

решение

$$\boldsymbol{\bar{\vartheta}(t) = gt + C}.$$

начальная задача *t=0*, *ϑ(0)=0*. Учитывая, получим

$$\boldsymbol{\bar{\vartheta}(t) = gt}. \tag{16}$$

Из (14) переходим к пределу, считая $\varepsilon = k$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \vartheta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g}{m - \varepsilon} \times \left[-M + mt + Me^{-\varepsilon\times t}\right] = gt \equiv \bar{\vartheta}(t) \tag{17}$$

Решение возмущенной и невозмущенной задачи выполняется.

Если коэффициент пропорциональности $1 < k < +\infty$. Тогда $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $0 < \varepsilon < 1$. Имеем сингулярную задачу

$$\varepsilon \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{\vartheta(t)}{M - mt} - \varepsilon g = 0, \tag{18}$$

начальная задача

$$\vartheta(0) = 0. \tag{19}$$

При невозмущенной задаче формально $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\overline{\vartheta}_1(t)}{M - mt} = 0. \tag{20}$$

Имеет решение при $t \neq \frac{M}{m}$:

$$\overline{\vartheta_1}(t) = 0. \tag{21}$$

Невозмущенная задача — алгебраическое уравнение, поэтому не требуется начальное условие. Решение возмущенной задачи с учетом (19)

$$\vartheta(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon g}{\varepsilon m + 1} \times \left[-M + mt + M\, exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right].$$

Исследовать решение (18), (19) будем в области $t \in [0, +\infty)$. Здесь пограничный слой появится в окрестности начальной точки. Толщина пограничного слоя равно $t \in \left[0, \varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

В данном случае толщина пограничного слоя особой роли не имеет, потому что выполняется устойчивость вправо.

Предельный переход выполняется в области $t \in [0, +\infty)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \vartheta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon g}{\varepsilon m + 1} \times \left[-M + mt + M\, exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] = 0 \equiv \overline{\vartheta}_1(t) \tag{22}$$

Задача (1) нелинейная, но от нее можно отделить линейную часть. В прикладном примере рассмотрена задача, приводящая к линейной.

Результаты и обсуждение

Если не учтем пограничный слой в бесконечно удаленной точке, то мы можем разными способами составить биустойчивую область. Если область биустойчива, то задача вида (3), (4) всегда разрешима. Хотим заметить, что при условии биустойчивости не существует сингулярная область, всю область можно рассмотреть как регулярную область. Область притяжения достаточна велика, поэтому мы можем говорить, что взяли оценку при всех R, кроме окрестности точки t_0.

В окрестности начальной точки получим постоянную величину, это нас не устраивает, поэтому мы должны придумать метод который дает возможность получить оценку в этой окрестности. В прикладном примере видно, что выполняется условия устойчивости вправо.

Выводы

Если решение задачи (3), (4) биустойчиво, то решения рассматриваются на всей числовой оси. Установлена асимптотическая близость решений возмущенных и невозмущенных задач. Здесь, оценка получена для нелинейной сингулярно возмущенной задачи, в которой одно уравнение соответствующего невозмущенного уравнения имеет корни равные нулю. Возможно, бывают случаи, когда невозмущенные уравнения имеют корни отличные от нуля. В данном случае исследование проводим аналогично.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001. 376 с.

2. Далецский Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. С. 162-165.

3. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_61

4. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2017. С. 180-280.

5. Турсунов Т. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Ош, 2013. С. 9-92.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 2016. С. 120-126.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: diss. … d-r. fiz.-mat. nauk. Zhalal-Abad. (in Kyrgyz).

2. Daletsskii, Yu. L., & Krein, M. G. (1970). Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve. Moscow. 162-165. (in Russian).

3. Karimov S., & Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii, kogda sobstvennye znacheniya matritsy imeyut mnimye chasti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Kyrgyz). https://doi.org/10.52754/16947452_2021_1_1_61

4. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami: diss. … d-r fiz.-mat. nauk. Zhalal-Abad. 180-280. (in Kyrgyz).

5. Tursunov, T. A. (2013). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennykh obyknovennykh i ellipticheskikh differentsial'nykh uravnenii: diss. … d-r fiz.-mat. nauk. Osh. 9-92. (in Kyrgyz).

6. Fikhtengolts, G. M. (2016). Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Moscow, 120-126. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 12.11.2022 г.

Принята к публикации 20.11.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А., Токторбаев А. М., Замирбек кызы Н. Прикладные задачи теории возмущений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №12. С. 36-42. https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/04

Cite as (APA):

Akmatov, A., Toktorbaev, A., & Zamirbek kyzy, N. (2022). Applied Problems of Perturbation Theory. *Bulletin of Science and Practice, 8*(12), 36-42. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/85/04