УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/02

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

©Акматов А. А., *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
©Токторбаев А. М., *SPIN-код 8216-4750, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, ain7@list.ru*

SINGULAR PROBLEM WITH BOUNDARY CONDITIONS

©Akmatov A., *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
©Toktorbaev A., *SPIN-code 8216-4750, Ph.D., Osh State University,*

Аннотация. В работе исследуются решения нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Здесь выполняются условия устойчивости. Мы выбираем начальную точку, но это краевая задача. Особенность и новизна данной работы заключается в том что здесь рассматриваются краевые условия. Для доказательства существования решений используется метод последовательных приближений. Мы также используем метод мажорант для доказательства сходимости решений. Для доказательства единственности решений воспользуемся методом от противного. Решение поставленной задачи рассматривается в действительной области. Используя особенности нелинейной задачи, разложим функцию в ряд Тейлора. Поэтому приводим задачу к новой форме. Это уже другая задача которая может быть решена в действительной области. В результате доказывается асимптотическая близость решения возмущенной и невозмущенной задач.

Abstract. Solutions of nonlinear singularly perturbed differential equations with boundary conditions are studied in this work. Here the stability conditions are satisfied. We choose a starting point, but this is a boundary value problem. The peculiarity and novelty of this work lies in the fact that here the considered boundary conditions. The method of successive approximations is used to prove the existence of solutions. We also use the majorant method to prove the convergence of solutions. To prove the uniqueness of solutions, we use the contradiction method. The solution of the stated problem is considered in the real area. Using the features of the nonlinear problem, we expand the function in a Taylor series. Therefore, we bring the problem to a new form. This is another problem that can be solved in the real area. As a result, the asymptotic closeness of the solution of the perturbed and unperturbed problems is proved.

Ключевые слова: неустойчивость, метод противного, метод мажорант, сингулярные возмущения, начальная точка, краевая задача, решение, последовательные приближения, дифференциальные уравнения, бесконечно малые величины.

Keywords: instability, contradiction method, majorant method, singular perturbations, initial point, boundary value problem, solution, successive approximations, differential equations, infinitesimal quantities.

Введение

Если в задаче рассматривается задача Коши, то они хорошо изучены в [1, 2]. Пусть $a(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$. тогда определяются устойчивые и неустойчивые интервалы относительно действительной области [5]. Получены соответствующие оценки [1, 2]. Действительная часть $\alpha(t)=0$ рассмотрено в работах [3, 4, 6]. Это относится к критическому случаю. Потому что определить устойчивый интервал в действительной области невозможно.

В предлагаемой работе рассматривается $a(t)=-\alpha(t)+i\beta(t)$, затем определяются устойчивые и неустойчивые интервалы [5]. Но рассматривать задачу Коши не целесообразно. Поэтому рассмотрим краевую задачу. Докажем лемму и теорему.

Задача нелинейная, исследование ведется в действительной области. Для простоты при доказательстве теоремы мы ограничиваем нелинейности второго порядка. Доказательство нелинейности более высокого порядка будет аналогичным.

В работе рассматриваются краевые задачи в устойчивой области. Цель исследования — доказать асимптотические близость решений возмущенной и невозмущенной задач.

Материалы и методы исследования

Объектом исследования является сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=a(t)y(t,\varepsilon)+f(t,y(t,\varepsilon))+\varepsilon g(t,y(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

с краевым условием

$$y(T,\varepsilon)=y^0, \tag{2}$$

где $\left|y^0\right|=O(\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ — малый параметр, $y(t,\varepsilon)$ - искомая функция, $t\in\Omega$, $[t_0,T]$ — отрезок действительной оси, $t_0<T$.

Определим область

$$\Omega^2=\{(t,y)|t\in[t_0,T],|y|\le\delta\},$$

где $0<\delta$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Задача. Доказать существование, ограниченность и единственность решения $y(t,\varepsilon)$ на промежутке $[t_0,T]$.

Для решения поставленной задачи от правых частей (1) потребуем выполнения следующих условий:

ϑ_1: $\operatorname{Re}a(t)>0$ при $t_0\le t<T_0$, $\operatorname{Re}a(t)<0$ при $T_0<t\le T$, $\operatorname{Re}a(T_0)=0$.

ϑ_2: $F(t)=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}a(s)ds$, $\forall t\in[t_0,T]$, $F(t)<0$, $F(t_0)=F(T)=0$.

ϑ_3: $g(t,y(t,\varepsilon))\equiv 0$, $\forall(t,y)\in\Omega^2$, $f(t,y(t,\varepsilon))\equiv 0$; $\left|f(t,\tilde{y})-f(t,\tilde{\tilde{y}})\right|\le M_0\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right|\times$
$\times\max\{|\tilde{x}|,|\tilde{\tilde{x}}|\}$, где $0<M_0$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Учитывая условие ϑ_3, функцию $g(t,y)$ разложим в окрестности точки $y=0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Т. 8. №7. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/80

$$g(t,y)=g(t,0)+\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}y+...+\frac{\partial^{(n+1)}g(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}y^{n+1}, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Тогда получим

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=a(t)y(t,\varepsilon)+f(t,y(t,\varepsilon))+\varepsilon\left[g(t,0)+\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}+...+\frac{\partial^{(n+1)}(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}y^{n+1}\right].$$

По условию ϑ_3 имеем $g(t,0)\equiv 0$. Введя следующие обозначения

$$\frac{\partial g(t,0)}{\partial y}=g_0(t),\ ...,\ \frac{\partial^{(n+1)}g(t,\theta y)}{\partial y^{n+1}}=g_{n+1}(t,y).$$

Имеем,

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=(a(t)+\varepsilon g_0(t))y(t,\varepsilon)+f(t,y(t,\varepsilon))+...+\varepsilon g_{n+1}(t,y(t,\varepsilon)) \tag{3}$$

$$y(T,\varepsilon)=y^0,\ \left|y^0\right|=C_0\varepsilon. \tag{4}$$

Докажем следующую лемму:

Лемма. Пусть выполняется ϑ_3. Тогда

$$\forall\left((t,\tilde{y})\wedge(t,\tilde{\tilde{y}})\in\Omega^2\right):\ \left|g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\right|\le M\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right|\max\left\{\left|\tilde{y}\right|,\left|\tilde{\tilde{y}}\right|\right\},$$

где $0<M$ - некоторая постоянная.

Доказательство. Возьмем разность $g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}$. Этот разность преобразуем следующим образом:

$$g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}+g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}=g_{n+1}(t,\tilde{y})\left(\tilde{y}^{n+1}-\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\right)+$$
$$+\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\left(g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\right).$$

К разности $g_{n+1}(t,\tilde{y})-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})$ можно применить теорему о конечных приращениях по переменной y.

Функции $g_{n+1}(t,y)$, $\dfrac{\partial g_{n+1}(t,\tilde{y}+\theta_1(\tilde{\tilde{y}}-\tilde{y})}{\partial y}$ непрерывны в области Ω^2, следовательно, они ограничены.

Учитывая, все сказанное имеем:

$$\left|g_{n+1}(t,\tilde{y})\tilde{y}^{n+1}-g_{n+1}(t,\tilde{\tilde{y}})\tilde{\tilde{y}}^{n+1}\right|\le M\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right|\max\left\{\left|\tilde{y}\right|,\left|\tilde{\tilde{y}}\right|\right\}.$$

Лемма доказано.

При $\varepsilon=0$ согласно ϑ_3 невозмущенное уравнение $a(t)\bar{y}(t)+f(t,\bar{y}(t))=0$ имеет решение $y(t)=0$, которое для присоединенного уравнения будет точки покоя. Точка покоя неустойчива при $t\in\left[t_0,T_0\right)$ и устойчива при $t\in\left(T_0,T\right]$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия ϑ_1 - ϑ_3. Тогда $\forall t\in\left[t_0,T\right]$ решение задачи (3)-(4) существует, единственно и для нее справедлива оценка

$$\left|y(t,\varepsilon)\right|\le\left|y_1(t,\varepsilon)\right|q_0 \tag{5}$$

где $1<q_0$ - некоторая постоянная, зависящая от ε.

Доказательство. Задачи (3)-(4) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением:

$$y(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_T^t F(s)ds\right)-\int_T^t[f(\tau,y)+\varepsilon g_{n+1}(\tau,y)]\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau F(s)ds\right)d\tau \qquad (6)$$

где $F(s)=a(s)+\varepsilon g_0(s)$.

Для доказательства существования решения уравнения (6) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$y_m(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)-\int_T^t[f(\tau,y_{m-1})+\varepsilon g_{n+1}(\tau,y_{m-1})]\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau F(s)ds\right)d\tau \qquad (7)$$

Проведем оценку последовательных приближений (7).

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$y_1(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_T^t F(s)ds\right),$$

$$|y_1(t,\varepsilon)|=C_0\varepsilon\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_T^t F(s)ds\right).$$

$$|y_m(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|-\frac{1}{\varepsilon}\int_T^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_t^\tau F(s)ds\right)M\left[|y_{m-1}|^{n+1}+\varepsilon|y_{m-1}|^{n+1}\right]d\tau.$$

где $F(s)=a(s)+\varepsilon g_0(s)$.

При $m=2$, $n=1$ имеем

$$|y_2(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_\tau^t F(s)ds\right)M\left[|y_1|^2+\varepsilon|y_1|^2\right]d\tau=|y_1(t,\varepsilon)|+\frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^t|y_1(\tau,\varepsilon)|^2\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_\tau^t F(s)ds\right)d\tau=|y_1(t,\varepsilon)|+\frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^t F(s)ds\right)\int_{t_0}^t C_0^2\varepsilon^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^\tau F(s)ds\right)d\tau=$$

$$=|y_1(t,\varepsilon)|+MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^t F(s)ds\right)\int_{t_0}^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^\tau F(s)ds\right)d\tau=|y_1(t,\varepsilon)|\times\left(1+C_0M\times\right.$$

$$\left.\times(1+\varepsilon)\int_{t_0}^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^\tau F(s)ds\right)d\tau\right).$$

Тогда получим

$$|y_2(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|\left(1+C_0M(1+\varepsilon)M_0\varepsilon\right).$$

Верно оценка

$$|y_2(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|q_0.$$

При $m=3$, $n=1$ справедлива следующая оценка

Т. 8. №7. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/80

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)M\left[|y_2|^2+\varepsilon|y_2|^2\right]d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|y_2(\tau,\varepsilon)|^2\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}|y_1|^2 q_0^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau =$$

$$= |y_1(t,\varepsilon)| + MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon q_0^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)|\times\Big(1+C_0M\times$$

$$\times q_0^2(1+\varepsilon)\Big)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau .$$

К последнему интегралу применяя лемму, получим

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|\big(1+C_0M(1+\varepsilon)q_0^2M_0\varepsilon\big).$$

Для $y_3(t,\varepsilon)$ получается оценка

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0 .$$

Пусть имеет место оценка

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \|y_1(t,\varepsilon)\|q_0 \tag{8}$$

Учитывая (8), докажем справедливость оценки для $(m+1)$.

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)M\left[|y_m|^2+\varepsilon|y_m|^2\right]d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}|y_m(\tau,\varepsilon)|^2\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)| + \frac{M(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}|y_1|^2 q_0^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau =$$

$$= |y_1(t,\varepsilon)| + MC_0^2(1+\varepsilon)\varepsilon q_0^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)|\times\Big(1+C_0M\times$$

$$\times q_0^2(1+\varepsilon)\Big)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau = |y_1(t,\varepsilon)|\big(1+C_0M(1+\varepsilon_0)q_0^2M_0\varepsilon\big).$$

Так как $1+C_0M(1+\varepsilon_0)M_0\varepsilon q_0^2 \le q_0$, следовательно $|y_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |y_1(t,\varepsilon)|q_0$. Таким образом, оценка (8) верна $\forall m\in N$. Из (8) вытекает, что $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ ограничена.

Теперь докажем сходимости последовательных приближений $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, применяя метод мажорант. Для этого последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ представим следующем виде:

$$y_m(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \big(y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)\big) + \big(y_3(t,\varepsilon)-y_2(t,\varepsilon)\big) + \ldots + \big(y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)\big).$$

Оценим $\|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)\|$. Имеем

$$|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)| \le \frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)|y_{m-1}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-y_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\max\{|y_{m-1}(\tau,\varepsilon)|,|y_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\}d\tau .$$

Учитывая (8), имеем $\max\{|y_{m-1}(t,\varepsilon)|,|y_{m-2}(t,\varepsilon)|\}=|y_1(t,\varepsilon)|q_0$.

Тогда получим

$$|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|\le\frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)|y_{m-1}-y_{m-2}||y_1|q_0d\tau.$$

При $m=2$,

$$|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)|\le\frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)|y_1|\times|y_1|q_0d\tau=$$

$$=\frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)C_0^2\varepsilon^2q_0^2\le\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau\le|y_1(t,\varepsilon)|MM_0C_0\varepsilon q_0^2(1+\varepsilon_0).$$

Пусть

$$|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|q_1,\text{ где }q_1=MM_0C_0\varepsilon q_0^2(1+\varepsilon_0).$$

Пусть

$$|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|q_1^{m-1}\tag{9}$$

Докажем, справедливость оценки (9) для $(m+1)$.

$$|y_{m+1}(t,\varepsilon)-y_m(t,\varepsilon)|\le\frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)|y_m-y_{m-1}|\times|y_1|q_0d\tau\le$$

$$\le\frac{M}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)|y_1|q_1^{m-1}|y_1|q_0d\tau=M(1+\varepsilon)q_0q_1^{m-1}C_0^2\varepsilon\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}F(s)ds\right)d\tau\le|y_1(t,\varepsilon)|q_1^m.$$

Оценка (9) верна $\forall m\in N$. Таким образом

$$\begin{gathered}|y_1(t,\varepsilon)+y_2(t,\varepsilon)+...+y_m(t,\varepsilon)+...|\le|y_1(t,\varepsilon)|+|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)|+|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)|+...\le\\ \le|y_1(t,\varepsilon)|\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}q_1^k\right)=|y_1(t,\varepsilon)|\times\frac{1}{1-q_1}\end{gathered}\tag{10}$$

Из (10) следует, что последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$, $\forall t\in[t_0,T]$ и при $0<q_1<1$ сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1) и для нее справедлива оценка $|y(t,\varepsilon)|\le|y_1(t,\varepsilon)|q_0$. Оценка (5) доказана.

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что существует другое решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (3)-(4).

$$x(t,\varepsilon):\ x(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}F(s)ds\right)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[f(\tau,y)-\varepsilon g(\tau,y)]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)d\tau.$$

Учитывая (7), получим

$$\left|y_m - x\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[(f(\tau, y_{m-1}) - f(\tau, y)) + \varepsilon\left(g_{n+1}(\tau, y_{m-1}) - g_{n+1}(\tau, y)\right)\right]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau \tag{11}$$

Далее, учитывая (11)

$$\left|y_1 - x\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)\left[f(\tau, y) + \varepsilon g_{n+1}(\tau, y)\right]d\tau \le \frac{M_0}{\varepsilon}(1+\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}F(s)ds\right)\times\left|x\right|^2 d\tau \le$$

$$\le M_0 C_0 (1+\varepsilon) q_0^2 \left|y_1(t,\varepsilon)\right|(t - t_0),$$

Предположим, что:

$$\left|y_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right| \le \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \frac{M_0^m C_0^m (1+\varepsilon)^m q_0^{m+1}(t-t_0)^m}{m!} \tag{12}$$

Докажем оценку (12)

$$\left|y_{m+1}(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right| \le \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \frac{M_0^{m+1} C_0^{m+1} (1+\varepsilon)^{m+1} q_0^{m+2}(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}, \ldots .$$

Тогда $\forall m \in N$ верна (12). Отсюда вытекает $\left\|y(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right\| \le 0 \Rightarrow y(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon)$. Единственность решения доказана. Теорема полностью доказано.

Пример. Пусть $a(t) = -t$, $t \in [-1,1]$, $t_0 = -1$, $T_0 = 0$, $T = 1$. Условия $\vartheta_1 - \vartheta_3$ выполняется, $[-1,0)$ — интервал неустойчивости, $(0,1]$ — интервал устойчивости. В качестве начальной точки возьмем $T = 1$. В этом случае условия (4) является краевой задачей.

Результаты и обсуждение

Подведя итог, можем сказать, что последовательность $\{y_m(t,\varepsilon\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, являющейся решением уравнения (3).Если условия устойчивости не выполняется, то мы не можем выбрать начальную точку, зависящую от малого параметра. В качестве отправной точки может выбрана величина, обратная малому параметру. Но это не рекомендуется. Поэтому мы выбираем начальную точку в устойчивом интервале. После этого справа движемся по левому краю рассматриваемого интервала. В результате имеем краевую задачу.

Выводы

Решение (3), (4) зависят от выбора функции $a(t)$ определяющей устойчивые и неустойчивые интервалы, а также выбора начальной задачи. В работе доказана теорема, удовлетворяющая условиям устойчивости. Также показана зависимость решения задачи не только от условий устойчивости, но и от гармонических функций $u(t) \le 0$. Рассматривается нелинейная задача, поэтому исследования проводились в действительной области. Доказанная теорема показывает, что асимптотическая близость решений возмущенной и невозмущенной задач.

Список литературы:

1. Акматов А. А. Асимптотика решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 24-31. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

2. Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 15-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

3. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19-26.

4. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_26

5. Барабашин Е. А. О построении функции Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1968. №4. С. 2128-2158.

6. Каримов С., Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. No1. С. 61-70.

References:

1. Akmatov, A. (2022). Investigation of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 15-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/01

2. Akmatov, A. (2022). Asymptotics of Solutions to a System of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 24-31. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/02

3. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19-26. (in Russian).

4. Akmatov, A. A. (2021). Investigation of solutions of a singularly perturbed problem. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. https://doi.org/10.52754/16947452_2021_3_1_26

5. Barabashin, E. A. (1968). O postroenii funktsii Lyapunova. *Differentsial'nye uravneniya,* (4), 2128-2158. (in Russian).

6. Karimov S., & Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 20.06.2022 г.

Принята к публикации 25.06.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А., Токторбаев А. М. Сингулярная задача с краевыми условиями // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №7. С. 21-28. https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/02

Cite as (APA):

Akmatov, A., & Toktorbaev, A. (2022). Singular Problem With Boundary Conditions. *Bulletin of Science and Practice, 8*(7), 21-28. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/80/02