УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

*©**Акматов А. А.,** SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

SOLUTIONS ASYMPTOTICS OF A HOMOGENEOUS BISINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION IN THE GENERALIZED FUNCTIONS THEORY

*©**Akmatov A.,** SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

Аннотация. В пространстве обобщенных функций рассматривается однородная система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае изменения устойчивости. Доказана теорема об обобщенных решениях соответствующей вырожденной системы уравнений. В особых точках устанавливается асимптотическая близость решений возмущенной и невозмущенной задач в особой области. Новизна работы заключается в том, что впервые получена оценка для сингулярной области. Вырожденная система имеет особую точку. На данный момент мы решаем уравнение в обобщенных функциях. В свою очередь, это тоже новинка, поскольку ранее выполненные работы рассматривали только классическое решение. Следующая новизна работы заключается в том, что мы берем исходную точку в неустойчивом интервале и также направляемся к неустойчивому интервалу. Это свойство не характерно для ранее опубликованных работ.

Abstract. In the space of generalized functions, a homogeneous system of singularly perturbed differential equations in the case of stability change is considered. A theorem on generalized solutions of the corresponding degenerate system of the equation is proved. At special points, the asymptotic closeness of the solutions of the perturbed and unperturbed problems in the singular domain is established. The novelty of the work lies in the fact that, for the first time, an estimate for the singular region was obtained. A degenerate system has a special point. At this point, we solve the equation in generalized functions. In turn, this is also a novelty, because previously performed works only considered the classical solution. The following novelty of the work lies in the fact that we take the starting point in an unstable interval and also head towards the unstable interval. This property is not characteristic of previously published works.

Ключевые слова: обобщенная функция, дифференциальные уравнения, функция Дирака, особые точки, бисингулярные возмущения, решение, задача Коши, функционал.

Keywords: generalized function, differential equations, Dirac function, singular points, bisingular perturbations, solution, Cauchy problem, functional.

Введение

Исследование асимптотика решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости рассмотрено в работах [1, 2, 4-9]. Введено понятие

 Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

регулярной и сингулярной областей [9, с. 42]. Регулярная область будет ограниченно или неограниченно относительно координатных осей. Если область регулярно, то доказано асимптотические близость решений возмущенной и невозмущенной задачи. Присутствия малого параметра дифференциальных уравнениях при старших производных обусловляется появлением пограничного слоя. Поведения решений сингулярно возмущенной задачи в пограничных слоях достаточно изучено в работе [9, с. 62].

Уникальный метод в этом направление считается метод линии уровня [1, с. 21]. Линии уровня аналитических функций полностью покрывает регулярной и сингулярной области. Но в сингулярной области не выполняется асимптотической близость решений возмущенной и невозмущенной задачи. Актуальность данной работы заключается в том, что впервые доказано асимптотические близость решений возмущенной и невозмущенной задачи в сингулярной областей. Решение задачи рассматривается в пространстве обобщенных функций [3, с. 24].

Постановка задачи. Рассмотрим задачи

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)+D(t)y(t,\varepsilon)=0 \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0. \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $D(t)=diag\left(\lambda_1(t),\lambda_2(t)\right)$, $y^0=colon\left(y_1^0,y_2^0\right)$ - постоянный вектор, $t\in R$. Диогнольная матрица-функция имеет кратную собственные значение $\lambda_1(t)=\lambda_2(t)=a(t)$, $a(t)\in C^\infty(R^1)$.

U. Пусть выполняются условия: $a(t)>0$, при $t\in\left(t^*,+\infty\right)$; $a(t)<0$ при $t\in\left(-\infty,t^*\right)$, $a(t^*)=0$.

Систему (1) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$D(t)\tilde{y}(t)=0. \tag{3}$$

Вырожденная система (3) имеет единственное классическое решение

$$\tilde{y}(t)=0, D(t)\neq 0. \tag{4}$$

Такие случаи рассматривались в работах [1, 2, 4-9] и доказано асимптотические близость решений задачи (1)-(2) и (3). Асимптотическая оценка верна, в регулярных областях.

Собственные значения матрица-функция $D(t)$ в точке $t=t^*$ обращаются в нуль. Эти точки называются точками поворота. Поэтому определим обобщенные решения [3, с. 52] задачи (3) в точках $t=t^*$.

Теорема 1. Вырожденная система (3) имеет обобщенные решения вида

$$\tilde{\tilde{y}}(t)=G(\delta(t-t^*)). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$\phi(x)=\phi(t_0)+\phi'(t_0)(t-t_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\phi^{(n)}(t_0)\left(t-t_0\right)^n+ \tag{6}$$

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

$$+\frac{1}{n!}\int_0^1 \phi^{(n+1)}(\tau t+(1-\tau)x_0)(1-\tau)^n(x-x_0)^{n+1}d\tau,\ (x\in R, n\geq 0).$$

Интегрируем (6), исходя из формулы Ньютона-Лейбница и многократо интегрируя по частям правую часть, получаем

$$f(t)=f(t^*)+\int_{t^*}^{t}f'(s)ds=f(t^*)-\int_{t^*}^{t}f'(s)d(t-s)=f(t^*)-(t-s)f'(s)\Big|_{t^\times}^{t}+$$

$$+\int_{t^*}^{t}f''(s)(t-s)ds=...=f(t^*)+...+\frac{f^{(n)}(t^*)}{n!}(t-t^*)^n+\int_{t^*}^{t}\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(t-s)^n ds.$$

Остаточный член преобразуем с помощью замены

$$t-s=t-t^*-\tau t+\tau t^*\Rightarrow t=t^*+\tau(t-t^*),\ (0\leq\tau\leq 1).$$

Таким образом,

$$t-t^*=(1-\tau)(t-t^*).$$

Поэтому остаточный член приобретает вид:

$$\int_0^1\frac{f^{(n+1)}(t^*+\tau(t-t^*))}{n!}(1-\tau)^n(t-t^*)^{n+1}d\tau.$$

Согласно смыслу задачи, требуется найти правило, по которому нужно вычислять значение $(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi)$ для любой функции $\psi\in S(R^1)$, если $(D(t)\tilde{\tilde{y}}(t),\phi(t))=0$ при любой функции $\phi(t)\in S(R^1)$.

По определению, умноженная на бесконечно дифференцируемую функцию на обобщенную, имеем

$$(D(t)\tilde{\tilde{y}}(t),\phi(t))=(\tilde{\tilde{y}}(t),D(t)\phi(t))=0.$$

Таким образом, значения искомого функционала $\tilde{\tilde{y}}(t)$ на всех функциях вида $D(t)\phi(t)$ равна нулю. Заметим, что наличие множителя $(t-t^*)^{n+1}$ у функции $(t-t^*)^{n+1}\phi(t),(n\geq 0)$ означает, что это функция при $t=t^*$ обращается в нуль. Покажем, что верно и обратное, т.е. если $\alpha(t^*)=0$ для некоторой функции $\alpha(t)\in S(R^1)$, то $\alpha(t)$ представима в виде $\alpha(t)=(t-t^*)^{n+1}\beta(t)$, где $\beta(t)-$некоторая функция из $S(R^1)$. Действительно, пусть $\alpha(t^*)=0$, $\alpha(t^*)\in S(R^1)$. Воспользуемся формулой (6) при $t=t^*$, $n=k$:

$$\alpha(t)=\alpha(t^*)+...+\frac{\alpha^{(k)}(t^*)}{k!}(t-t^*)^k+\frac{(t-t^*)^{k+1}}{k!}\int_0^1\alpha^{(k+1)}(t^*+\tau(t-t^*))(1-\tau)^k d\tau=(t-t^*)^{n+1}\beta(t),$$

где $\beta(t)=\frac{1}{k!}\int_0^1\alpha^{(k+1)}(t^*+\tau(t-t^*))(1-\tau)^k d\tau$. Очевидно, что $\beta(t)\in S(R^1)$, поскольку $\alpha(t)$ принадлежит в $S(R^1)$. Следовательно, $\alpha^{(n)}(t)$ принадлежит в $S(R^1)$.

Пусть теперь $\psi(t)-$ произвольная функция из $S(R^1)$. Нам нужно найти, чему равно $(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t))$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\alpha(t)=\psi(t)-\psi(t^*)\mu_0-\psi'(t^*)\mu_1-...-\frac{\psi^{(k)}(t^*)}{k!}\mu_k.$$

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

Отсюда

$$0=(\tilde{\tilde{y}}(t),\alpha(t))=\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t)-\psi(t^*)\mu_1-\psi'(t^*)\mu_2-\ldots-\frac{\psi^{(k)}(t^*)}{k!}\mu_k=\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t)\right)\right)-$$
$$-\psi(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_1\right)-\psi'(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_2\right)-\ldots-\frac{\psi^{(k)}(t^*)}{k!}(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_k). \quad (7)$$

Из соотношения (7) получаем, что

$$(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t))=\psi(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_1\right)+\psi'(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_1\right)+\psi''(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_2\right)+\ldots+\psi^{(k)}(t^*)\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_k\right).$$

Здесь

$$\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t)\right)=\psi(t^*)C_0+\psi'(t^*)C_1+\ldots+\psi^{(k)}(t^*)C_k, \text{ где } C_k=\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_k\right), k=0,1,2,\ldots.$$

Из определения $\delta-$ функции, получаем, что

$$\left(\tilde{\tilde{y}}(t),\psi(t)\right)=\left(C_0\delta(t-t^*)+C_1\delta'(t-t^*)+\ldots+C_k\delta^{(k)}(t-t^*),\psi(t)\right),$$

где $C_k=(\tilde{\tilde{y}}(t),\mu_k), k=0,1,2,\ldots$.

Таким образом, обобщенные решения задачи (3) имеет вид (5)

$$\tilde{\tilde{y}}(t)=C_0\delta(t-t^*)+C_1\delta'(t-t^*)+\ldots+C_k\delta^{(k)}(t-t^*)=G(\delta(t-t^*)).$$

Теорема доказана.

Общие решение задачи (1), (2)

$$y(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right). \quad (8)$$

Основная задача, при каких t выполняется предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=\tilde{\tilde{y}}(t). \quad (9)$$

Определение 1. Последовательность обобщенных функций $y_n(t)\in S'(R^1)$ сходится, если $\exists\ y_n(t)\in S'(R^1)$ такая что $\forall\phi(t)\in S$, $\left(y_n(t),\phi(t)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(y(t),\phi(t)\right)$.

Сходимость такого типа называют слабой сходимостью (или поточечной).

Определение 2. Последовательность функций называется $\delta-$ образной, если она сходится к $\delta-$ функции.

Теорема 2. Если выполняется условие U, тогда для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\left\|y(t,\varepsilon)-\tilde{\tilde{y}}(t)\right\|\le C\varepsilon^{\frac{1}{n}}, \quad (10)$$

здесь $n=2k,\ k\in N, 0<C-$некоторые постоянное число.

Доказательство. Учитывая определение 1. в равенстве (8) рассмотрим как последовательность гладких функций

$$(y_\varepsilon(t,\varepsilon),\phi(t))=\left(y^0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right),\phi(t)\right).$$

Для вычисления предела исследуем семейство значений $\left(y_\varepsilon(t,\varepsilon),\phi(t)\right)$ при $\varepsilon\to 0_+$, $\forall\phi(t)\in S(R^1)$. Тогда

$$\left(y_\varepsilon(t,\varepsilon),\phi(t)\right)=y^0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds}\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+y^0\phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds}dt. \tag{11}$$

Отсюда, второе слагаемое равенство (11) верно $y^0\int_a^b y_\varepsilon(t,\varepsilon)dt\le y^0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds}dt=1$.

Сделав замену $\frac{t}{\sqrt[n]{\varepsilon}}=z$, мы видим, что при $a<0<b$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^b y_\varepsilon(t,\varepsilon)dt=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt[n]{\varepsilon}y^0\int_{\frac{a}{\sqrt[n]{\varepsilon}}}^{\frac{b}{\sqrt[n]{\varepsilon}}}\exp\left(-\int_{\sqrt[n]{\varepsilon}z_0}^{\sqrt[n]{\varepsilon}z}a(s)ds\right)dz=1$. Осталось показать, что в равенстве (11) первый интеграл справа стремится к нулю вместе с ε. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt=\int_{-\infty}^{a\varepsilon^{-\delta}}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+\int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{b\varepsilon^{-\delta}}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+$$

$$+\int_{b\varepsilon^{-\delta}}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt.$$ Здесь $a<0<b$, $0<\delta<\frac{1}{n}$.

Возьмем норму

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt\right\|=\left\|\int_{-\infty}^{a\varepsilon^{-\delta}}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+\int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{b\varepsilon^{-\delta}}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+\right.$$

$$\left.+\int_{b\varepsilon^{-\delta}}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt\right\|\le constO(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{n\delta}}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\max_{\left[a\varepsilon^{-\delta},b\varepsilon^{-\delta}\right]}\left[\phi(\sqrt[n]{\varepsilon}t)-\phi(0)\right],$$

где через $const$ обозначены оценки $\left|\phi(\sqrt[n]{\varepsilon}t)-\phi(0)\right|$ на полу бесконечных интервалах. В силу непрерывности $\phi(t)$ и с учетом $\delta<\frac{1}{n}$ последнее слагаемое в этой оценке стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Таким образом оценка (10) верна. Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть $a(t)=t$. Задача (1), (2) имеет решение вида $y(t,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}}$. Начальная точка выбрано в неустойчивом интервале и равно $t_0=0$.

Если возьмем формально $\varepsilon=0$, то получим

$$t\tilde{y}(t)=0. \tag{12}$$

Учитывая теорему 1, обобщенные решения вырожденного уравнения (12): $\tilde{\tilde{y}}(t)=C_0\delta(t)$,

где C_0 – некоторая постоянная, $\delta(t)$ – функция Дирака порядка сингулярности равна 1.

Осталось показать, при каких значениях t выполняется равентсва (9). Пусть $(y_\varepsilon(t,\varepsilon),\phi(t))\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\phi(0)$ или $y_\varepsilon(t,\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\delta(t)$. Для этого

$$(y_\varepsilon(t,\varepsilon),\phi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)\left[\phi(t)-\phi(0)\right]dt+\phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}y_\varepsilon(t,\varepsilon)dt \tag{13}$$

Вторая слагаемая в правой части равенства (13) равна $\phi(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_\varepsilon(t,\varepsilon)dt = \dfrac{\phi(0)}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}}dt$.

Становится видным после замены переменной $\dfrac{t}{\sqrt{\varepsilon}} = z$, этот интеграл равен единице. Осталось показать, что первый интеграл в равенстве (13) стремится к нулю вместе с ε. Заметим, что $\forall a > 0$ и $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$. Тогда имеем

$$\int\limits_{a\varepsilon^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}^{+\infty} y_\varepsilon(t,\varepsilon)dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\times e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} - \int\limits_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\times e^{-\frac{t^2}{2}}dt \underset{\varepsilon\to 0}{=} O(e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}}).$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left[\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right]dt\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{-a\varepsilon^{-\delta}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left[\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right]dt + \int\limits_{-a\varepsilon^{-\delta}}^{a\varepsilon^{-\delta}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\times\left[\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right]dt + \int\limits_{a\varepsilon^{-\delta}}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\times\left[\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right]dt\right| \le$$

$$\le const\times O(\exp\left(-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}\right) + \max_{\left[-a\varepsilon^{-\delta},a\varepsilon^{\delta}\right]}\left|\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right|,$$

где через $const$ обозначены оценки $\left|\phi(\sqrt{\varepsilon}t)-\phi(0)\right|$ на полубесконечных интервалах. В силу непрерывности $\phi(t)$ и с учетом $\delta < \dfrac{1}{2}$ последнее слагаемое в этой оценке стремится к нуля при $\varepsilon \to 0$. Отсюда видно, что предельный переход (9) выполняется.

Результаты и обсуждение

Из выше доказанных теорем видно, что в пространстве обобщенных функций $S'(R^1)$, можно установить асимптотическую близость решений бисингулярно возмущенных и невозмущенных задач в сингулярной области.

Работа обсуждено на основе примера на научном семинаре кафедры математического анализа под руководством профессора С. Каримова.

Выводы

Известно, что [1, 2, 4–9] точки смены устойчивости относится к сингулярных интервалах. Если начальная точка выбрана в сингулярном интервале, то поведение решений задачи (1), (2) неизвестно. Поэтому начальная задача выбрана, как бесконечно большая величина. В классической теории функции получать асимптотические оценки задачи (1), (2) в особой точке практически невозможно. Это видно в равенство (4). В работе [9, с. 52] сделано попытка получить оценку в окрестности особой точки. Работа велась в комплексной плоскости. Если переходим к теории обобщенных функций, то показать асимптотические близость решений (1), (2) и (3) возможно в пространстве $S'(R^1)$.

Т. 8. №2. 2022
https://doi.org/10.33619/2414-2948/75

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярновозмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. …д-р физ.-мат. наук. Жалал-Абад. 2001. 21 с.

2. Абдилазизова А. А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены устойчивости // Евразийское Научное Объединение. 2021. №7-1. С. 1-3. https://doi.org/10.5281/zenodo.5168522

3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Государственное издательство физико-математической литературы. М. 1959. С. 24-63.

4. Каримов С., Акматов А. Поведения решений сингулярновозмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости // Естественные и технические науки. 2006. №1. С. 14.

5. Каримов С., Акматов А. А., Ысакова М. Поведения решений сингулярновозмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости (случай, где собственные значения не имеют нулей на границе рассматриваемой области Н) // Естественные и технические науки. 2006. №3. С. 18-22.

6. Каримов С., Акматов А. А. Поведения решений сингулярновозмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости II // Естественные и технические науки. 2006. №2. С. 14-18.

7. Каримов С. Акматов А. А., Анарбаева Г. М. Более точные оценки решения сингулярновозмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2016. №4. С. 49-61.

8. Каримов С. Акматов А. А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющих условную устойчивость // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. №1. С. 61-70.

9. Тампагаров К. Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. Дисс. …д-р физ.-мат. наук. Жалал-Абад. 2017. С. 180-280.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarnovozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. Zhalal-Abad.

2. Abdilazizova, A. A. (2021). Asimptotika resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi v sluchae smeny ustoichivosti. *Evraziiskoe Nauchnoe Obʺedinenie,* (7-1), 1-3. (in Russian). https://doi.org/10.5281/zenodo.5168522

3. Gel'fand, I. M., & Shilov, G. E. (1959). Obobshchennye funktsii i deistviya nad nimi. Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury. Moscow, 24-63. (in Russian).

4. Karimov, S., & Akmatov, A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarnovozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (1), 14. (in Russian).

5. Karimov, S., Akmatov, A. A., & Ysakova, M. (2006). Povedeniya reshenii singulyarnovozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti (sluchai, gde sobstvennye znacheniya ne imeyut nulei na granitse rassmatrivaemoi oblasti N). *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (3), 18-22. (in Russian).

6. Karimov, S., & Akmatov, A. A. (2006). Povedeniya reshenii singulyarnovozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii v sluchae smeny ustoichivosti II. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* (2), 14-18. (in Russian).

7. Karimov, S. Akmatov, A. A., & Anarbaeva, G. M. (2016). Bolee tochnye otsenki resheniya singulyarnovozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 49-61. (in Russian).

8. Karimov, S. & Akmatov, A. A. (2021). Issledovanie reshenii sistemy singulyarno vozmushchennykh differentsial'nykh uravnenii imeyushchikh uslovnuyu ustoichivost'. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 61-70. (in Russian).

9. Tampagarov, K. B. (2017). Pogransloinye linii v teorii singulyarno vozmushchennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. Zhalal-Abad, 180-280.

Работа поступила в редакцию 30.11.2021 г.

Принята к публикации 10.12.2021 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А. Асимптотика решений однородного бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения в теории обобщенных функций // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №2. С. 18-25. https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02

Cite as (APA):

Akmatov A. (2022). Solutions Asymptotics of a Homogeneous Bisingularly Perturbed Differential Equation in the Generalized Functions Theory. *Bulletin of Science and Practice, 8*(2), 18-25. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/75/02