ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.956.6 https://doi.org/10.33619/2414-2948/84/01
MSC 2020: 31A10; 58J32

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

©Абдумиталип уулу К., *SPIN-код 4476-7149, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, kubatbek-90@mail.ru*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED FOURTH-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS GLUING CONDITIONS

©Abdumitalip uulu K., *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, kubatbek-90@mail.ru*

Аннотация. Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами, содержащее произведение смешанного параболо-гиперболического оператора и дифференциального оператора колебания струны с разрывными условиями склеивания в пятиугольнике на плоскости. Методом понижения порядка уравнений разрешимость краевой задачи сводится к решению задачи Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с разрывными условиями склеивания. Разрешимость этой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно следа производной функции по y на линии изменения типа уравнения. В гиперболической части области методом функции Римана получено представление решения задачи для гиперболического уравнения с младшими членами. В параболической части области методом последовательных приближений и функции Грина получено решение первой краевой задачи для параболического уравнения с младшими членами. В результате решение задачи реализуется методом решения задачи Гурса и первой краевой задачи для уравнения колебания струны.

Abstract. The theorem of the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem for the equation in partial derivatives of the fourth order with variable coefficients containing the product of the mixed parabolic-hyperbolic operator and the differential operator of the oscillation string with discontinuous conditions of gluing in the pentagon to the plane is proved. By the method of reducing the order of equations, the solvability of the boundary value problem is reduced to the solution of the Tricomi problem for the mixed parabola-hyperbolic equation with variable coefficients and discontinuous gluing conditions. Solving this problem is reduced to the solution of Fredholm's integral equation of the second order relative to the trace of the derivative function on y along the line of variation of the equation type. In the hyperbolic part of the domain, the representation of the solution of the problem for the hyperbolic equation with the smallest terms was obtained by using the Riemann function method. In the parabolic part of the domain, the solution of the first boundary value problem for the parabolic equation with the smallest terms is obtained by the method of successive approximations and the Green's function. As a result, the solution of the problem is realized by the method of solving the Gursa problem and the first boundary value problem for the equation of string oscillation.

Ключевые слова: краевые задачи, параболо-гиперболический оператор, интегральные уравнения, функция Римана и Грина.

Keywords: boundary value problems, parabolic-hyperbolic operator, integral equations, Riemann and Green’s function.

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная отрезками линий $AC: x+y=0, CB: x-y=\ell(\ell>0), BB_0: x=\ell, B_0A_0: y=h(h>0), A_0A: x=0$, рассмотрим уравнение

$$L_1L_2u=0 \tag{1}$$

$$L_1 \equiv \begin{cases} l_1 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+c_1(x,y), y>0, \\ l_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}+c_2(x,y), y<0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $a_i(x,y), c_i(x,y) (i=1,2), b_2(x,y)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered} a_1(x,y), a_{1x}(x,y), a_{1y}(x,y), c_1(x,y) \in C(\bar{D}_1), \\ a_2(x,y), a_{2x}(x,y), b_2(x,y), b_{2y}(x,y), c_2(x,y) C(\bar{D}_2). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $D_1=D\cap(y>0), D_2=D\cap(y<0)$. Класс C^{n+m} означает существование и непрерывность всех производных $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} (r=0,1,\dots,n; s=0,1,\dots,m)$ [1].

Уравнение (1) в области D_1 представимо в виде

$$l_1L_2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}+a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+c_1(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=0, (x,y)\in D_1 \tag{3}$$

и имеет двукратную характеристику $y=const$ и две различные характеристики $x+y=const, x-y=const$, а в области D_2 примет вид

$$l_2L_2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c_2(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, (x,y)\in D_2 \tag{4}$$

причем имеет две различные двукратные характеристики: $x+y=const, x-y=const$ [2].

В области D для уравнения (1) рассматривается

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) в области $D\backslash(y=0)$;

2) $u(x,y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в области $\bar{D}$;

3) функция $\square u = u_{xx} - u_{yy}$ непрерывна в области $\bar{D} \backslash (y = 0)$;

4) функции $\dfrac{\partial \square u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \square u}{\partial y}$ непрерывна в области $D \backslash (y = 0)$;

5) для функции $\square u$ и $\dfrac{\partial \square u}{\partial y}$ на линии $y = 0$ выполняются следующие разрывные условия склеивания:

$$\square u(x,-0) = \alpha(x) \square u(x,+0) + \gamma(x), 0 \leq x \leq \ell, \tag{5}$$
$$\frac{\partial \square u(x,-0)}{\partial y} = \beta(x) \frac{\partial \square u(x,+0)}{\partial y} + \delta(x), 0 \leq x \leq \ell,$$

где $\alpha(x), \beta(x), \delta(x), \gamma(x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\forall x \in [0,\ell]: \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x) \in C[0,\ell], \alpha(x)\beta(x) \neq 0; \tag{6}$$

6) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y),\ u|_{BB_0} = \varphi_2(y),\ 0 \leq y \leq h, \tag{7}$$

$$u_{xx}|_{AA_0} = \varphi_3(y),\ u_{xx}|_{BB_0} = \varphi_4(y),\ 0 \leq y \leq h, \tag{8}$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}, \qquad u|_{BC} = \psi_2(x), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \tag{10}$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)(i = \overline{1,4}, \psi_j(x)(j = \overline{1,3})$ — заданные функции, причем:

$$\varphi_i(y) \in \mathrm{C}^2[0,h](i = 1,2), \varphi_j(y) \in \mathrm{C}[0,h](j = 3,4), \tag{11}$$
$$\psi_1(x) \in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right], \psi_2(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2},\ell\right], \psi_3(x) \in C^3\left[\frac{\ell}{2},\ell\right];$$

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0), \psi_2(\ell) = \varphi_2(0), \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right), \tag{12}$$
$$\alpha(\ell)[\varphi_4(0) - \varphi_2''(0)] + \gamma(\ell) = -\sqrt{2}\psi_3'(\ell).$$

Краевые задачи для уравнений $L_1 u = 0$, $L_2 L_1 u = 0$ рассмотрены в работах [3, 4].

Краевая задача для уравнения (1) с постоянными коэффициентами и с непрерывными условиями склеивания, изучена в работе [5].

Краевые задачи для уравнения $L_1 L_2 u = 0$, в случае, когда оператор L_1 представляет собой эллиптико-гиперболический оператор, изучены в работах [6, 7].

Краевые задачи для уравнения типа (1), когда L_1 — эллиптико-гиперболический, а L_2 —

дифференциальный оператор n-порядка, исследована в работе [8].

Краевые задачи для уравнений смешанного типа с разрывными условиями склеивания впервые изучены в работах [9, 10].

При $y > 0$ уравнение (1) запишем в виде системы:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \upsilon_1(x,y), (x,y) \in D_1, \quad (13)$$

$$l_1 \upsilon_1 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} + a_1(x,y)\upsilon_{1x} + c_1(x,y)\upsilon_1 = 0, (x,y) \in D_1; \quad (14)$$

а при $y < 0$ в виде следующей системы:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \upsilon_2(x,y), (x,y) \in D_2, \quad (15)$$

$$l_2 \upsilon_2 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial \upsilon_2}{\partial y} + c_2(x,y)\upsilon_2 = 0, (x,y) \in D_2. \quad (16)$$

Из граничных условий (7), (8) получим:

$$\upsilon_1|_{x=0} = \bar{\varphi}_1(y), \upsilon_1|_{x=\ell} = \bar{\varphi}_2(y), 0 \le y \le h, \quad (17)$$

где $\bar{\varphi}_1(y) = \varphi_3(y) - \varphi_1''(y), \bar{\varphi}_2(y) = \varphi_4(y) - \varphi_2''(y)$. Условие (10) запишем в виде

$$\upsilon_2(x, x-\ell) = -\sqrt{2}\psi_3'(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell. \quad (18)$$

Таким образом, для определения функций $\upsilon_1(x,y)$ и $\upsilon_2(x,y)$ придем к следующей задаче.

Задача 2. Найти функции $\upsilon_1(x,y)$ и $\upsilon_2(x,y)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\upsilon_1(x,y) \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), \upsilon_2(x,y) \in C(\bar{D}_2) \cap C^2(D_2)$;

2) $\upsilon_1(x,y)$ является решением уравнения (14) в области D_1, а $\upsilon_2(x,y)$ является решением уравнения (16) в области D_2;

3) для функций $\upsilon_i(x,y), \frac{\partial \upsilon_i(x,y)}{\partial y} (i = 1,2)$ на линии $y = 0$ выполняются разрывные условия склеивания:

$$\upsilon_2(x,-0) = \alpha(x)\upsilon_1(x,+0) + \gamma(x), 0 \le x \le \ell,$$
$$\frac{\partial \upsilon_2(x,-0)}{\partial y} = \beta(x)\frac{\partial \upsilon_1(x,+0)}{\partial y} + \delta(x), 0 \le x \le \ell; \quad (19)$$

4) функция $\upsilon_1(x,y)$ удовлетворяет условиям (17), а $\upsilon_2(x,y)$ удовлетворяет условию (18).

Для решения задачи 2 введем новые неизвестные функции следующим образом: $\upsilon_1(x,+0) = \mu_1(x), \upsilon_2(x,-0) = \mu_2(x), \upsilon_{1y}(x,+0) = \theta_1(x), \quad \upsilon_{2y}(x,-0) = \quad = \theta_2(x), 0 \le x \le \ell$. Тогда условия склеивания (19) запишется в виде:

$$\mu_2(x) = \alpha(x)\mu_1(x) + \gamma(x), 0 \le x \le \ell, \tag{20}$$

$$\theta_2(x) = \beta(x)\theta_1(x) + \delta(x), 0 \le x \le \ell \tag{21}$$

2. Соотношение между $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, полученное из области D_1.

Сначала рассмотрим задачу 2. Переходя к пределу при $y \to +0$, из уравнения (14), получим соотношение между функциями $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$\mu_1''(x) + a_1(x,0)\mu_1'(x) + c_1(x,0)\mu_1(x) = \theta_1(x), 0 \le x \le \ell. \tag{22}$$

Из условия согласования имеем:

$$\mu_1(0) = \bar{\varphi}_1(0), \mu_1(\ell) = \bar{\varphi}_2(0). \tag{23}$$

Полагая

$$\mu_1(x) = \bar{\varphi}_1(0) + \frac{x}{\ell}[\bar{\varphi}_2(0) - \bar{\varphi}_1(0)] + z(x), \tag{24}$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция, задача (22), (23) сводится к следующей задаче

$$z''(x) + a_1(x,0)z'(x) + c_1(x,0)z(x) = g(x), \tag{25}$$

$$z(0) = 0, z(\ell) = 0, \tag{26}$$

где $g(x) = \theta_1(x) - c_1(x,0)\bar{\varphi}_1(0) - \frac{1}{\ell}[\bar{\varphi}_2(0) - \bar{\varphi}_1(0)][a_1(x,0) + xc_1(x,0)]$

Теорема 1. Если $a_1(x,0), a_{1x}(x,0), c_1(x,0) \in C[0,\ell]$ и

$$\forall x \in [0,\ell]: c_1(x,0) - \frac{1}{2}a_{1x}(x,0) \le 0, \tag{27}$$

тогда задача (25), (26) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим однородное уравнение (25). Умножая это уравнение на $z(x)$ и интегрируя полученное равенство по x от 0 до ℓ, имеем тождество:

$\int_0^\ell \left\{[z'(x)]^2 - \left[c_1(x,0) - \frac{1}{2}a_{1x}(x,0)\right] z^2(x)\right\} dx \equiv 0.$

Отсюда при выполнении условия (27) заключаем, что $\forall x \in [0,\ell]: z(x) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Решение задачи (25), (26) представим в виде [11]

$$z(x) = \int_0^\ell G_1(x,\xi)\, g(\xi) d\xi, \tag{28}$$

где $G_1(x,\xi)$ — функция Грина. Тогда из (24) и (28) имеем соотношение между $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, полученное из области D_1 в виде:

$$\mu_1(x) = g_1(x) + \int_0^\ell G_1(x,\xi)\,\theta_1(\xi)d\xi, \tag{29}$$

где $g_1(x) = \bar{\varphi}_1(0) + \frac{x}{\ell}[\bar{\varphi}_2(0) - \bar{\varphi}_1(0)] - \int_0^\ell G_1(x,\xi)\left\{\bar{\varphi}_1(0)c_1(\xi,0) + \frac{1}{\ell}[\bar{\varphi}_2(0) - \bar{\varphi}_1(0)] \times\right.$

$$\times [a_1(\xi,0) + \xi c_1(\xi,0)]\}d\xi.$$

3. Соотношение между $\mu_2(x)$ и $\theta_2(x)$, полученное из области D_2. Решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условиям $\upsilon_2(x,-0) = \mu_2(x)$, $\upsilon_{2y}(x,-0) = \theta_2(x), 0 \le x \le \ell$, имеет вид [12, 13]:

$$\upsilon_2(x,y) = \frac{1}{2}[R(x,y;x+y,0)\mu_2(x+y) + R(x,y;x-y,0)\mu_2(x-y)] + \tag{30}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\left[R_\eta(x,y;\xi,0) + b_2(\xi,0)R(x,y;\xi,0)\right]\mu_2(\xi)d\xi -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} R(x,y;\xi,0)\,\theta_2(\xi)d\xi,$$

где $R(x,y;\xi,\eta)$ — функция Римана, которая определяется как решение следующей *задачи Гурса:*

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (a_2R)_\xi - (b_2R)_\eta + c_2R = 0, (\xi,\eta) \in D_2^*, \tag{31}$$

$$R(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=x+y-\xi} = exp\left\{-\frac{1}{2}\int_\xi^x [a_2(t,x+y-t) + \right. \tag{32}$$
$$+b_2(t,x+y-t)]dt\}, x+y \le \xi \le x,$$

$$R(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=\xi-x+y} = exp\left\{\frac{1}{2}\int_x^\xi [a_2(t,t-x+y) - \right. \tag{33}$$
$$-b_2(t,t-x+y)]dt\}, x \le \xi \le x-y,$$

$$R(x,y;x,y) = 1. \tag{34}$$

где $D_2^* = \{(\xi,\eta): y < \eta < 0, x+y-\eta < \xi < x-y+\eta\}$.

Используя условия (18), из (30) имеем

$$R(x,x-\ell;2x-\ell,0)\mu_2(2x-\ell) - R(x,x-\ell;\ell,0)\sqrt{2}\psi_3'(\ell) - \tag{35}$$
$$\int_\ell^{2x-\ell}[R_\eta(x,x-\ell;\xi,0) + b_2(\xi,0)R(x,x-\ell;\xi,0)]\mu_2(\xi)d\xi +$$
$$+\int_\ell^{2x-\ell} R(x,x-\ell;\xi,0)\,\theta_2(\xi)d\xi = -2\sqrt{2}\psi_3'(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell.$$

Пусть $2x - \ell = z$. Тогда $x = \frac{z+\ell}{2}$. Так как $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$, то $0 \le 2x - \ell \le \ell, x - \ell = \frac{z-\ell}{2}, 0 \le z \le \ell, -\frac{\ell}{2} \le \frac{z-\ell}{2} \le 0$. Следовательно, равенство (35) можно записать в виде:

$$R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};z,0\right)\mu_2(z)=\int_\ell^z\left[R_\eta\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)+\right.$$
$$\left.+b_2(\xi,0)R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\mu_2(\xi)d\xi-\int_\ell^z R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)\theta_2(\xi)d\xi-$$
$$-2\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{z+\ell}{2}\right)+\sqrt{2}R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\ell,0\right)\psi_3'(\ell),0\le z\le\ell.$$

Отсюда, заменяя z на x, имеем

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)\mu_2(x)=\int_\ell^x\left[R_\eta\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)+\right. \tag{36}$$
$$\left.+b_2(\xi,0)R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\mu_2(\xi)d\xi-\int_\ell^x R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\theta_2(\xi)d\xi$$
$$-$$
$$-2\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x+\ell}{2}\right)+\sqrt{2}R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\ell,0\right)\psi_3'(\ell),0\le x\le\ell.$$

Имеет место следующая
Теорема 2. $\forall x\in[0,\ell]$:

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)>0 \tag{37}$$

Доказательство. Условие (32) представим в виде

$$R(x,y;\xi,x+y-\xi)=exp\left\{-\frac{1}{2}\int_\xi^x[a_2(t,x+y-t)+\right. \tag{38}$$
$$\left.+b_2(t,x+y-t)]\right\}dt,x+y\le\xi\le x.$$

Полагая $\xi=x+y$, из (38) имеем

$$R(x,y;x+y,0)=exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x+y}^x[a_2(t,x+y-t)+b_2(t,x+y-t)]\right\}dt. \tag{39}$$

Для удобства рассуждения запишем уравнение прямой $CB\colon x-y=\ell$
в параметрическом виде: $\begin{cases}x=\frac{s+\ell}{2},0\le s\le\ell,\\ y=\frac{s-\ell}{2},0\le s\le\ell.\end{cases}$
Заметим, что $\boldsymbol{x+y=s}$. Тогда из (39) имеем:

$$R\left(\frac{s+\ell}{2},\frac{s-\ell}{2};s,0\right)=exp\left\{\frac{1}{2}\int_s^{\frac{s+\ell}{2}}[a_2(t,s-t)+b_2(t,s-t)]dt\right\},0\le s\le\ell.$$

Отсюда, заменяя s на x, убеждаемся в справедливости неравенства (37).
Учитывая неравенство (37), уравнение (36) представим в виде

$$\mu_2(x) = \int_x^\ell N_1(x,\xi)\,\mu_2(\xi)d\xi + \int_x^\ell N_2(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \tag{40}$$

где

$$N_1(x,\xi) = -\frac{R_\eta\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)+b_2(\xi,0)R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)},\quad N_2(x,\xi) = \frac{R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)}{R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)},\ \Phi_1(x) = \frac{-2\sqrt{2}\psi_3'(x)+\sqrt{2}R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\ell,0\right)\psi_3'(\ell)}{R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)}.$$

Обращение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (40) относительно $\mu_2(x)$ имеем

$$\mu_2(x) = \Phi_2(x) + \int_x^\ell T_1(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi, \tag{41}$$

где $T_1(x,\xi) = N_2(x,\xi) + \int_x^\xi R_1(x,t)\,N_2(t,\xi)dt$, $\Phi_2(x) = \Phi_1(x) + \int_x^\ell R_1(x,\xi)\,\Phi_1(\xi)d\xi$, а $R_1(x,\xi)$ — резольвента ядра $N_1(x,\xi)$.

Соотношение (41), представляет собой связь между $\mu_2(x)$ и $\theta_2(x)$, полученное из области D_2.

4. Сведение задачи 2 к интегральному уравнению. Исключая $\theta_1(x)$ из (21) и (29), имеем $\mu_1(x) = \int_0^\ell \frac{G_1(x,\xi)}{\beta(\xi)}\theta_2(\xi)d\xi + g_1(x) - \int_0^\ell \frac{\delta(\xi)}{\beta(\xi)}G_1(x,\xi)\,d\xi$. Подставляя найденное выражение для $\mu_1(x)$ в (20), получим:

$$\mu_2(x) = \alpha(x)\int_0^\ell \frac{G_1(x,\xi)}{\beta(\xi)}\theta_2(\xi)d\xi + \alpha(x)\left[g_1(x) - \int_0^\ell \frac{\delta(\xi)}{\beta(\xi)}G_1(x,\xi)\,d\xi\right] + \gamma(x). \tag{42}$$

Исключая $\mu_2(x)$ из (41) и (42), получаем интегральное уравнение

$$\int_x^\ell T_1(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi = \int_0^\ell T_2(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi + \Phi_3(x), \tag{43}$$

где $T_2(x,t) = \frac{\alpha(x)}{\beta(\xi)}G_1(x,\xi)$, $\Phi_3(x) = \alpha(x)\left[g_1(x) - \int_0^\ell \frac{\delta(\xi)}{\beta(\xi)}G_1(x,\xi)\,d\xi\right] + \gamma(x) - \Phi_2(x)$.

Продифференцирую (43) и учитывая при этом равенство $T_1(x,x) = N_2(x,x) = -1$, имеем

$$\theta_2(x) = \int_x^\ell T_3(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi + \int_0^\ell T_4(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi + \Phi_3'(x), \tag{44}$$

где $T_3(x,\xi) = T_{1x}(x,\xi)$, $T_4(x,\xi) = -T_{2x}(x,\xi)$.

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (44), получим

$$\theta_2(x) = \int_0^{\ell} T(x,\xi)\,\theta_2(\xi)d\xi + \Phi_4(x), \tag{45}$$

где $T(x,t) = T_4(x,\xi) + \int_x^{\ell} R_2(x,t)\,T_4(t,\xi)dt$,
$\Phi_4(x) = -\Phi_3'(x) - \int_x^{\ell} R_2\,(x,\xi)\Phi_3'(\xi)d\xi$, $R_2(x,\xi)$ — резольвента ядра $T_3(x,\xi)$. Пусть
$$\|T\| = \max_{\substack{0\le x\le\ell \\ 0\le t\le\ell}} |T(x,\xi)|.$$

Теорема 3. Если выполняется условие

$$\ell\cdot\|T\| \le 1, \tag{46}$$

тогда интегральное уравнение (45) имеет единственное решение, представимое в виде

$$\theta_2(x) = \Phi_5(x) + \int_0^{\ell} R_3(x,\xi)\,\Phi_5(\xi)d\xi, \tag{47}$$

где $R_3(x,\xi)$ — резольвента ядра $T(x,t)$.

После определения $\theta_2(x)$ по формуле (47), из формул (21), (29), (20) последовательно определяем $\theta_1(x), \mu_1(x), \mu_2(x)$ соответственно. Таким образом, существование и единственность решения задачи 2 доказана.

5. Решение задачи 2 в области $\boldsymbol{D_1}$. Из постановки задачи 2 в области D_1 для $\upsilon_1(x,y)$ получим следующую *первую краевую задачу* для параболического уравнения:

$$l_1\upsilon_1 \equiv \upsilon_{1xx} - \upsilon_{1y} + a_1(x,y)\upsilon_{1x} + c_1(x,y)\upsilon_1 = 0, (x,y)\in D_1, \tag{48}$$

$$\upsilon_1|_{x=0} = \bar{\varphi}_1(y), \upsilon_1|_{x=\ell} = \bar{\varphi}_2(y), 0\le y\le h, \upsilon_1(x,0) = \mu_1(x), 0\le x\le \ell, \tag{49}$$

где $\bar{\varphi}_1(y) = \varphi_3(y) - \varphi_1''(y), \bar{\varphi}_2(y) = \varphi_4(y) - \varphi_2''(y)$.

Теорема 3. Если $\forall(x,y)\in\overline{D_1}\colon a_1, a_{1x}, c_1 \in C(\bar{D})$ и выполняются условия

$$c_1(x,y) - \frac{1}{2}a_{1x}(x,y) \le 0, \tag{50}$$

тогда задача (48), (49) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим однородные краевые условия (48). Умножая уравнение (48) на $\upsilon_1(x,y)$ и интегрируя полученное тождество по области D_1, имеем тождество:

$-\iint_{D_1} \upsilon_1 l_1\upsilon_1 dxdy \equiv \int_0^{\ell} dx \int_0^{h} \left\{\upsilon_{1x}^2 - \left[c_1(x,y) - \frac{1}{2}a_{1x}(x,y)\right]\upsilon_1^2\right\}dy + \frac{1}{2}\int_0^{h} \upsilon_1^2(x,h) \equiv 0.$

Отсюда, при выполнении условия (50), заключаем, что $\forall(x,y)\in\bar{D}_1\colon \upsilon_1(x,y)\equiv 0$. Теорема 3 доказана.

Доказательство существования решения задачи (48), (49) устанавливается следующим образом. Введем новую функцию $w(x,y)$:

$$\upsilon_1(x,y) = w(x,y)\,exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{x} a_1(\xi,y)\,d\xi\right) \tag{51}$$

Тогда уравнение (48) сводится к уравнению

$$w_{xx} - w_y + \tilde{c}_1(x,y)w = 0, \tag{52}$$

где $\tilde{c}_1(x,y) = c_1(x,y) - \frac{1}{2}a_{1x}(x,y) - \frac{1}{4}a_1^2(x,y) + \frac{1}{2}\int_0^x a_{1y}(\xi,y)d\xi$.

Краевые условия (49) преобразуется к виду:

$$w|_{x=0} = \bar{\varphi}_1(y), w|_{x=\ell} = \bar{\varphi}_2^*(y), 0 \le y \le h, w(x,0) = \bar{\mu}_1(x), 0 \le x \le \ell, \tag{53}$$

где $\bar{\varphi}_2^*(y) = \bar{\varphi}_2(y)\, exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\ell a_1(\xi,y)d\xi\right)$, $\bar{\mu}_1(x) = \mu_1(x)\, exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x a_1(\xi,0)d\xi\right)$.

Используя для решения задачи (52), (53) функцию Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, имеем

$$w(x,y) = f(x,y) + \int_0^y d\eta \int_0^\ell K(x,y;\xi,\eta)\, w(\xi,\eta)d\xi, \tag{54}$$

где $K(x,y;\xi,\eta) = \tilde{c}_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)$, $f(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\,\bar{\varphi}_1(\eta)d\eta -$

$$-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\,\bar{\varphi}_2^*(\eta)d\eta + \int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\,\bar{\mu}_1(\xi)d\xi,$$

$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=+\infty}^{+\infty}\left[exp\left(-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right) - exp\left(-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\right]$ —функция Грина [14].

Заметим, что для ядра уравнения (54) имеет место оценка

$$\forall(x,y) \in \bar{D}_1 \wedge \forall(\xi,\eta) \in \bar{D}_1: |K(x,y;\xi,\eta)| \le \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{1}{2}}},$$

где C — положительная константа. Поэтому уравнение (54) является интегральным уравнением типа Фредгольма со слабой особенностью, она разрешима и имеет единственное решение, которое строится методом последовательных приближений [15].

6. Решение задачи 1 в области $\boldsymbol{D_2}$**.** Решение задачи 1 в области $\boldsymbol{D_2}$ определим как решение задачи Гурса для уравнения (15), которое представимо в виде:

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x+y+\ell}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) + \\ + \frac{1}{4}\int_0^{x+y} d\xi \int_\ell^{x-y} \upsilon_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta. \tag{55}$$

Отсюда при $y = 0$ имеем

$$\tau(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x+\ell}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_\ell^x \upsilon_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta.$$

Аналогичным образом, из (55) находим и $\nu(x) = u_y(x,0)$.

7. Решение задачи 1 в области $\boldsymbol{D_1}$**.** Решение задачи 1 в области D_1 определяется как решение первой краевой задачи для уравнения (13) с условиями

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x), 0\le x\le \ell.$$

Решение этой задачи определяется методом разделения переменных [13].

Таким образом, имеет место

Теорема 4. Если выполняются условия (2), (6), (11), (12), (46) и (50), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Список литературы:

1. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Известия вузов. Математика. 1999. №10. С. 73-76.

2. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.

3. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.

4. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

5. Абдумиталип уулу Кубатбек. Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны // Вестник ОшГУ. Математика, физика, техника. 2021. №2. С. 11-20.

6. Бобылева Л. А., Смирнов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. 1972. №5. С. 15-21.

7. Смирнов М. М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. №9. С. 1678-1686.

8. Жегалов В. И. Некоторые задачи для уравнения смешанного-составного типа в бесконечной области // Труды семинара по краевым задачам. 1972. Вып. 9. С. 75-85.

9. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского университета. 1962. Т. 122. Кн. 3. С. 3–16.

10. Каратопраклиев Г. Об одном обобщении задачи Трикоми // Доклады АН СССР. 1964. Т. 158. №2. С. 271-274.

11. Денисов А. М., Разгулин А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 2009. 114 с.

12. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.

13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. У равнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

14. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

15. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975. 304 с.

References:

1. Zhegalov, V. I., & Utkina, E. A. (1999). Ob odnom psevdoparabolicheskom uravnenii tret'ego poryadka. *Izvestiya vuzov. Matematika,* (10), 73-76. (in Russian).

2. Dzhuraev, T. D., & Sopuev, A. (2000). K teorii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka. Tashkent. (in Uzbek).

3. Dzhuraev, T. D. (1979). Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov. Tashkent. (in Russian).

4. Dzhuraev, T. D., Sopuev, A., & Mamazhanov, M. (1986). Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo–giperbolicheskogo tipa. Tashkent. (in Russian).

5. Abdumitalip, uulu Kubatbek (2021). Kraevaya zadacha dlya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s operatorom kolebaniya struny. *Vestnik OshGU. Matematika, fizika, tekhnika,* (2), 11-20. (in Uzbek).

6. Bobyleva, L. A., & Smirnov, M. M. (1972). Ob odnoi kraevoi zadache dlya uravneniya smeshanno–sostavnogo tipa 4-go poryadka. *Izvestiya vuzov. Matematika,* (5), 15-21. (in Russian).

7. Smirnov, M. M. (1975). Kraevaya zadacha so smeshcheniem dlya uravneniya smeshanno–sostavnogo tipa 4-go poryadka. *Differentsial'nye uravneniya, 11*(9), 1678-1686. (in Russian).

8. Zhegalov, V. I. (1972). Nekotorye zadachi dlya uravneniya smeshannogo-sostavnogo tipa v beskonechnoi oblasti. *Trudy seminara po kraevym zadacham, 9*, 75-85. (in Russian).

9. Zhegalov, V. I. (1962). Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnymi usloviyami na obeikh kharakteristikakh i s razryvami na perekhodnoi linii. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta, 122*, 3–16. (in Russian).

10. Karatoprakliev, G. (1964). Ob odnom obobshchenii zadachi Trikomi. *Doklady AN SSSR, 158*(2), 271–274. (in Russian).

11. Denisov, A. M., & Razgulin, A. V. (2009). Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. Moscow. (in Russian).

12. Bitsadze, A. V. (1976). Uravneniya matematicheskoi fiziki. Moscow. (in Russian).

13. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1977). U ravneniya matematicheskoi fiziki. Moscow. (in Russian).

14. Polyanin, A. D. (2001). Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki. Moscow. (in Russian).

15. Krasnov, M. L. (1975). Integral'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu. Moscow. (in Russian).

Работа поступила
в редакцию 26.09.2022 г.

Принята к публикации
09.10.2022 г.

Ссылка для цитирования:

Абдумиталип уулу К. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными условиями склеивания // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №11. С. 12-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/84/01

Cite as (APA):

Abdumitalip uulu, K. (2022). Boundary Value Problems for a Mixed Fourth-order Parabolic-Hyperbolic Equation With Discontinuous Gluing Conditions. *Bulletin of Science and Practice, 8*(11), 12-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/84/01